Арженовский С.В., Молчанов И.Н.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Учебное пособие

Ростов-на-Дону
2001

УДК [338.27+330.43](075.8)
А80
1Л4

Арженовский С.В., Молчанов И.Н. Статистические методы прогнозирования. Учебное пособие /Рост. гос. экон. унив. – Ростов-н/Д., – 2001. – 74 с. – **ISBN 5-7972-0379-0.**

В учебном пособии изложены в систематизированном виде: классификация прогнозов, анализ временных рядов, методы выделения тренда и периодических колебаний, адаптивные, экспертные методы прогнозирования. Особое внимание уделено моделям стационарных и нестационарных временных рядов и их идентификации, а также вопросам оценки адекватности и точности прогнозов. По каждому разделу приведена литература, контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы.

Для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям, в рамках изучения курса «Эконометрика».

Arzhenovsky S.V., Molchanov I.N. Statistical methods of forecasting. The manual. Rostov-on-Don: RSEU, 2001. – 74 p. – **ISBN 5-7972-0379-0.**

In the manual are systematized the following: classification of the forecasts, time-series analysis, methods of trend and periodic fluctuation separation, adaptive, expert methods of forecasting. The special attention is given to models of stationary and non-stationary time-series and their identification, and also an estimation of adequacy and accuracy of the forecasts. On each section the literature, control questions and tasks for independent work are given.

This book will serve as a text for the students training on economic specialties and studying Econometrics.

Замечания и предложения просим направлять по адресу:
344007, г.Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 69, к. 404, каф. СМиП.

E–mail: **KOR@NOVOCH.RU**
IGORM@APPLECLUB.DONPAC.RU
Интернет: **http://www.srstu.novoch.ru/K_PriclMath.html**
http://www.appleclub.donpac.ru

Рецензенты:

Л.И.Ниворожкина, доктор экономических наук, профессор, зав. кафедрой СМиП РГЭУ «РИНХ»

В.С.Князевский, Заслуженный деятель науки Российской Федерации, доктор экономических наук, профессор, РГЭУ «РИНХ»

Утверждено в качестве учебного пособия редакционно-издательским советом РГЭУ

ISBN 5-7972-0379-0.

Предисловие

Прогнозирование социально-экономического развития является важнейшим разделом экономической науки, призванным обеспечить государственные органы власти, общественность и субъекты экономической деятельности информацией о развитии экономики, а также связанных с ней социальных процессов. В этой связи изучение методов социально-экономического прогнозирования является одной из важных задач в системе экономического образования. Основу всей совокупности названных методов традиционно составляют статистические методы, применяемые для прогнозирования развития социальных и экономических явлений и процессов, построения адекватных моделей временных рядов и выбора наиболее приемлемых вариантов из всех возможных способов прогнозирования. Важное место в системе методов прогнозирования отводится также экспертным методам.

Дипломированный экономист должен уметь осуществлять прогнозирование и многовариантные аналитические расчеты в области экономической и управленческой деятельности. Поэтому одним из требований при подготовке специалистов в высшей школе является выработка у обучающихся профессиональных навыков в сборе, обработке статистических данных и построении многовариантных прогнозов динамики социально-экономических явлений и процессов. Учебное пособие призвано в систематизированном виде изложить возможности применения основных статистических методов прогнозирования для решения разнообразных прикладных задач и принятия приемлемых управленческих решений в процессе хозяйственной деятельности. При изложении материала авторы стремились показать стройность и взаимосвязанность различных методов анализа временных рядов, их научную и практическую полезность для решения задач социально-экономического прогнозирования.

Несмотря на обширный перечень научной литературы, посвященной вопросам статистического изучения и прогнозирования социально-экономических явлений и процессов, в настоящее время ощущается недостаток учебных пособий, содержащих систематическое изложение учебного курса «Прогнозирование национальной экономики» и его важнейшего раздела – «Методы социально-экономического прогнозирования». Данная книга, содержащая в систематизированном виде соответствующие статистические методы и математические модели, должна в определенной мере восполнить этот пробел. Для работы с предлагаемым изданием необходимы базовые знания некоторых разделов следующих учебных дисциплин: высшая математика, теория вероятностей, математическая статистика, общая теория статистики, эконометрика. Текст учебного пособия включает лекционный курс по статистическим методам прогнозирования и материал для практических (лабораторных) занятий в компьютерном классе. Эффективным является использование данной книги в сочетании со статистическими пакетами прикладных программ – Stata, Eviews, Statistica – при подготовке заданий для самостоятельной работы и при проведении практических занятий.

Авторы благодарят профессора Л.И.Ниворожкину и профессора В.С.Князевского за рецензирование учебного пособия.

1. Значение и содержание социально-экономического прогнозирования

1.1. Роль прогнозирования в принятии управленческих решений

Прогноз – вероятностное научно обоснованное суждение о перспективах, возможных состояниях того или иного явления в будущем и (или) об альтернативных путях и сроках их осуществления.

Прогнозирование – процесс разработки прогнозов. Роль прогнозирования в принятии управленческих решений [17] показана на рис. 1.

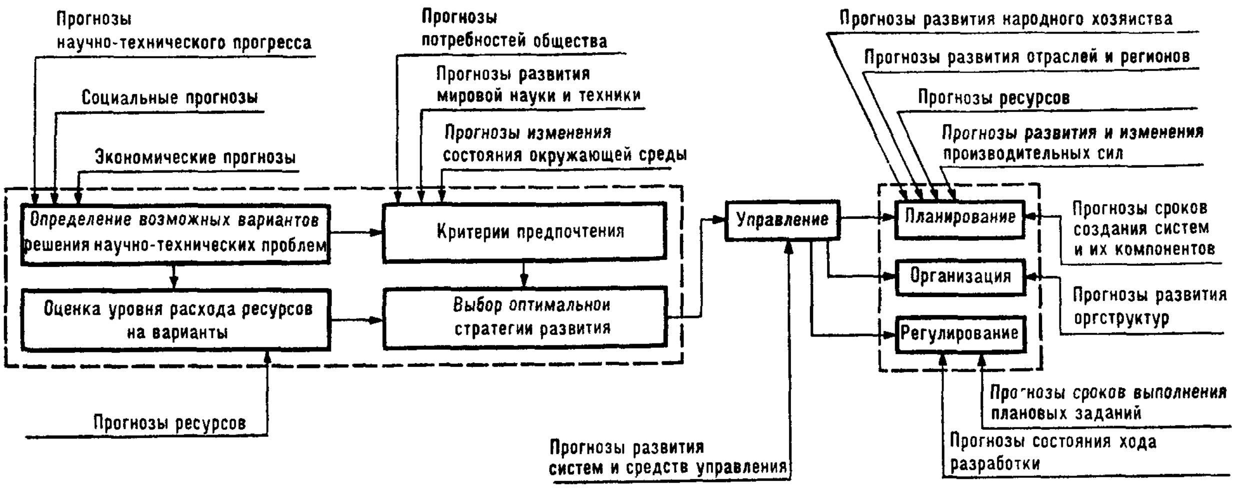


Рис. 1. Укрупненная схема использования прогнозов в управлении

Из рисунка 1 следует, что прогнозная информация может использоваться как на этапе принятия управленческого решения, так и при его реализации в различных формах. Соответствующие блоки выделены пунктиром. Прогнозы позволяют наметить возможные социально-экономические цели развития общества; сформировать направления научно-технического развития; выявить объективно сложившиеся тенденции функционирования экономики и сферы услуг; обосновать альтернативы развития на перспективу; определить ресурсы, которыми будет располагать общество; выявить потребности в определенных видах продукции и т.п. Очевидно, что роль прогнозной информации о развитии организационных структур, состоянии хода реализации бизнес-проектов, эволюции экономических систем, в настоящее время недооценивается. В использовании же прогнозов для планирования социально-экономических процессов в нашей стране накоплен большой опыт, который позволяет применять методические наработки в условиях переходной экономики.

1.2. Классификация социально-экономических прогнозов и методов прогнозирования

Типология прогнозов может строиться по различным критериям в зависимости от целей, задач, объектов, предметов, проблем, характера, периода упреждения, методов, организации прогнозирования и т. д.

1. **По проблемно-целевому критерию** (для чего разрабатывается прогноз?) различают два типа прогнозов:

- *поисковый прогноз* (исследовательский, изыскательский, трендовый, генетический и т. п.) - определение возможных состояний явления в будущем. Имеется в виду условное продолжение в будущее тенденций развития изучаемого явления в прошлом и настоящем, абстрагируясь от возможных решений, действия на основе которых способны радикально изменить тенденции, вызвать в ряде случаев самоосуществление или саморазрушение прогноза. Такой прогноз отвечает на вопрос: что вероятнее всего произойдет при условии сохранения существующих тенденций?
- *нормативный прогноз* (программный, целевой) - определение путей и сроков достижения возможных состояний явления, принимаемых в качестве цели. Имеется в виду прогнозирование достижения желательных состояний на основе заранее заданных норм, идеалов, стимулов, целей. Такой прогноз отвечает на вопрос: какими путями достичь желаемого?

Поисковый прогноз строится с использованием определенной шкалы (поля, спектра) возможностей, на которой затем устанавливается степень вероятности прогнозируемого явления. При нормативном прогнозировании происходит такое же распределение вероятностей, но уже в обратном порядке: от заданного состояния к наблюдаемым тенденциям.

2. **По критерию соотнесения с различными формами конкретизации управления** возможно выделение подтипов поисковых и нормативных прогнозов.

- *Целевой прогноз* собственно желаемых состояний отвечает на вопрос: что именно желательно и почему? Происходит построение на определенной шкале возможностей оценочной функции распределения предпочтительности: нежелательно - менее желательно - более желательно - наиболее желательно - оптимально. Ориентация - содействие оптимизации процесса целеполагания (установление идеально предположенного результата деятельности).
- *Плановый прогноз* представляет собой по существу выработку поис-

ковой и нормативной прогнозной информации для отбора наиболее целесообразных плановых нормативов, индикативных или директивных заданий с выявлением нежелательных, подлежащих устранению альтернатив и с тщательным выяснением отдаленных, прямых и косвенных последствий принимаемых плановых решений. Такой прогноз отвечает на вопрос: как, в каком направлении ориентировать планирование, чтобы эффективнее достичь поставленных целей?

- *Программный прогноз* возможных путей, мер и условий достижения предполагаемого состояния прогнозируемого явления отвечает на вопрос: что конкретно необходимо, чтобы достичь желаемого? Для ответа на этот вопрос важны и поисковые и нормативные прогнозные разработки. Первые выявляют проблемы, которые нужно решить, чтобы реализовать программу, вторые определяют условия реализации. Программное прогнозирование должно сформулировать гипотезу о возможных взаимовлияниях различных факторов, указать гипотетические сроки и очередность достижения промежуточных целей на пути к главной. Тем самым как бы завершается отбор возможностей развития объекта исследования, начатый плановым прогнозированием.
- *Проектный прогноз* конкретных образов того или иного явления в будущем при допущении ряда пока еще отсутствующих условий отвечает на вопрос: как (конкретно) это возможно, как это может выглядеть? Проектные прогнозы (их называют еще прогнозными проектами, дизайн-прогнозами и т. д.) призваны содействовать отбору оптимальных вариантов перспективного проектирования, на основе которых должно развертываться затем реальное, текущее проектирование.
- *Организационный прогноз* текущих решений (применительно к сфере управления) для достижения предусмотренного желаемого состояния явления, поставленных целей отвечает на вопрос: в каком направлении ориентировать решения, чтобы достичь цели? Сопоставление результатов поисковых и нормативных разработок должно охватывать весь комплекс организационных мероприятий, повышая тем самым общий уровень управления.

3. **По периоду упреждения** – промежутку времени, на который рассчитан прогноз – различаются:

- ✓ *оперативный,* как правило, рассчитан на перспективу, на протяжении которой не ожидается существенных изменений объекта исследования - ни количественных, ни качественных;

- *краткосрочный* – рассчитан на перспективу, на протяжении которой не ожидается существенных количественных изменений объекта исследования;
- *долгосрочный* – рассчитан на перспективу, на протяжении которой ожидаются существенные не только количественные, но и существенные качественные изменения объекта исследования;
- *среднесрочный* – охватывает перспективу между кратко- и долгосрочным прогнозами с преобладанием количественных изменений над качественными;
- *дальнесрочный (сверхдолгосрочный)* – охватывает перспективу, в течение которой ожидаются столь значительные качественные изменения, что можно говорить лишь о самых общих перспективах развития исследуемого явления или процесса.

Временная градация прогнозов является в определенной мере условной и зависит от характера и цели данного прогноза. В социально-экономических прогнозах эмпирически установлен следующий временной масштаб: оперативные прогнозы имеют продолжительность до одного месяца, краткосрочные – до одного года, среднесрочные – на рассчитаны несколько (до пяти) лет, долгосрочные – на период свыше пяти и, примерно, до пятнадцати - двадцати лет, дальнесрочные – за пределами долгосрочных.

4. **По объекту исследования** различаются *естествоведческие, научно-технические* и *обществоведческие* (социальные в широком значении этого термина) прогнозы.

В *естествоведческих* прогнозах взаимосвязь между предсказанием и предуказанием незначительна, близка или практически равна нулю из-за невозможности управления объектом. Поэтому здесь в принципе применимо только поисковое прогнозирование с ориентацией на возможно более точное безусловное предсказание будущего состояния явления. Яркий пример – метеорологический прогноз.

В *обществоведческих* прогнозах эта взаимосвязь настолько значительна, что способна давать эффект самоосуществления или, напротив, саморазрушения прогнозов действиями людей на основе целей, планов, программ, проектов, вообще решений (включая принятые с учетом сделанных прогнозов). В связи с этим здесь необходимо сочетание поисковых и нормативных разработок, т. е. условных предсказаний с ориентацией на повышение эффективности управления. Примером может являться прогноз результатов выборов для той или иной политической партии.

Научно-технические прогнозы занимают промежуточное место между естествоведческими и обществоведческими прогнозами. Они, как правило, основываются на имеющемся опыте (нормативные разработки), и могут быть поисковыми. Примером такого прогноза являются тенденции в технологиях производства кристаллов для компьютеров, отслеживаемые и прогнозируемые заинтересованными фирмами.

1.3. Инструментарий прогнозирования

В основе прогнозирования лежат три взаимодополняющих источника информации о будущем:

- ◊ оценка перспектив развития, будущего состояния прогнозируемого явления на основе опыта, чаще всего при помощи аналогии с достаточно хорошо известными сходными явлениями и процессами;
- ◊ условное продолжение в будущее (экстраполяция) тенденций, закономерности развития которых в прошлом и настоящем обладают высокой степенью инертности;
- ◊ модель будущего состояния того или иного явления, процесса, построенная сообразно ожидаемым или желательным изменениям ряда условий, перспективы развития которых достаточно хорошо известны.

В соответствии с этим существуют три дополняющих друг друга способа разработки прогнозов:

- ✓ **анкетирование** (интервью, опрос) – метод изучения мнений населения, специалистов (экспертов) с целью упорядочить, объективизировать субъективные оценки прогнозного характера. Особенно большое значение имеют экспертные оценки. Опросы населения в практике прогнозирования применяются сравнительно редко;
- ✓ **экстраполирование и интерполирование** – построение динамических рядов развития показателей прогнозируемого явления на протяжении периодов основания прогноза в прошлом и упреждения прогноза в будущем (ретроспекции и проспекции прогнозных разработок);
- ✓ **моделирование** - построение поисковых и нормативных моделей с учетом вероятного или желательного изменения прогнозируемого явления на период упреждения прогноза по имеющимся прямым или косвенным данным о масштабах и направлениях изменений. Наиболее эффективная прогнозная модель - система уравнений. Однако имеют значение все возможные виды моделей в широком смысле это-

го термина: сценарии, имитации, графы, матрицы, подборки показателей, графические изображения и т. д.

Приведенное разделение способов прогнозирования условно, потому что на практике эти способы взаимно перекрещиваются и дополняют друг друга. Прогнозная оценка обязательно включает в себя элементы экстраполяции и моделирования. Процесс экстраполяции невозможен без элементов оценки и моделирования. Моделирование подразумевает предварительную оценку и экстраполирование.

Согласно [17] определим основные понятия инструментария прогнозирования.

Прием прогнозирования - конкретная форма теоретического или практического подхода к разработке прогноза, одна или несколько математических или логических операций, направленных на получение конкретного результата в процессе разработки прогноза. *Процедура* - ряд приемов, обеспечивающих выполнение определенной совокупности операций. *Метод* - сложный прием, упорядоченная совокупность простых приемов, направленных на разработку прогноза в целом. *Методика* - упорядоченная совокупность приемов, процедур, операций, правил исследования на основе одного или чаще определенного сочетания нескольких методов. *Методология прогнозирования* - область знания о методах, способах, системах прогнозирования. *Способ прогнозирования* - получение и обработка информации о будущем на основе однородных методов разработки прогноза. *Система прогнозирования* (прогнозирующая система) - упорядоченная совокупность методик, технических средств, предназначенная для прогнозирования сложных явлений или процессов.

Опыт показывает, что ни один из названных способов (и тем более методов), взятый сам по себе, не может обеспечить значительную степень достоверности, точности горизонта прогноза. Зато в определенных *сочетаниях* они оказываются в высокой степени эффективными.

Общая логическая последовательность важнейших операций разработки прогноза сводится к следующим основным этапам [17]:

1. Предпрогнозная ориентация (программа исследования). Уточнение задания на прогноз: характер, масштабы, объект, периоды основания и упреждения и т. д. Формулирование целей и задач, предмета, проблемы и рабочих гипотез, определение методов, структуры и организации исследования.

2. Построение исходной (базовой) модели прогнозируемого объекта методами системного анализа. Для уточнения модели возможен опрос населения и экспертов.

3. Сбор данных прогнозного фона методами, о которых говорилось вы-

ше.

4. Построение динамических рядов показателей - основы, стержня будущих прогнозных моделей методами экстраполяции; возможно обобщение этого материала в виде прогнозных предмодельных сценариев.

5. Построение серии гипотетических (предварительных) поисковых моделей прогнозируемого объекта методами поискового анализа профильных и фоновых показателей с конкретизацией минимального, максимального и наиболее вероятного значений.

6. Построение серии гипотетических нормативных моделей прогнозируемого объекта методами нормативного анализа с конкретизацией значений абсолютного (т. е. не ограниченного рамками прогнозного фона) и относительного (т. е. привязанного к этим рамкам) оптимума по заранее определенным критериям сообразно заданным нормам, идеалам, целям.

7. Оценка достоверности и точности, а также обоснованности прогноза (его верификация) посредством уточнения гипотетических моделей обычно методами опроса экспертов.

8. Выработка рекомендаций для вариантных решений в сфере управления на основе сопоставления поисковых и нормативных моделей. Для уточнения рекомендаций возможно проведение опросов населения и экспертов. Иногда при этом строятся серии поствероятностных прогнозных моделей-сценариев с учетом возможных последствий реализации выработанных рекомендаций для их дальнейшего уточнения.

9. Экспертное обсуждение (экспертиза) прогноза и научных рекомендаций, их доработка с учетом выявленных несовершенств и сдача заказчику.

10. Вновь предпрогнозная ориентация на основе сопоставления материалов уже разработанного прогноза с новыми данными прогнозного фона и новый цикл исследования, ибо прогнозирование должно быть таким же непрерывным, как управление, повышению эффективности которого оно призвано служить.

Можно выделить следующие **виды социально-экономических объектов прогнозирования**:

- с полным обеспечением количественной информацией, для которых имеется в наличии ретроспективная количественная информация в необходимом объеме;
- с неполным обеспечением количественной информацией, для которых имеющаяся в наличии ретроспективная информация допускает использование статистических методов, однако не обеспечивает на заданном времени упреждения заданную точность прогноза;

- с наличием качественной ретроспективной информации, относительно прошлого развития которых имеется только качественная информация и полностью отсутствует, либо очень ограничена количественная;
- с полным отсутствием ретроспективной информации - это, как правило, несуществующие, проектируемые объекты.

Статистические методы могут с уверенностью применяться для первого случая, с некоторым уменьшением точности прогноза – для второго случая. Для двух последних случаев более эффективно применение экспертных методов.

На практике при построении прогнозов социально-экономических явлений исследователь чаще всего имеет дело с исходными данными поперечного или продольного срезов. В первом случае он применяет регрессионные модели, во втором - модели временных рядов. Если же имеется недостаток количественной информации, то наиболее распространенными по применению являются экспертные методы.

В этой связи дальнейшее изложение материала сосредоточено на статистических методах (разделы 2-7, 9) и экспертных методах (раздел 8).

2. Временные ряды и их предварительный анализ

2.1. Виды временных рядов

Временны′м рядом называется упорядоченная по времени последовательность наблюдений.

Выделяют *одномерные* временные ряды, полученные при фиксированной количественной характеристике, и *многомерные* временные ряды, полученные при наблюдении нескольких характеристик выделенного объекта.

Временные ряды могут быть *дискретными* и *непрерывными*. В составе дискретных выделяют ряды для равноотстоящих моментов наблюдения и для произвольных моментов наблюдения.

Временные ряды бывают детерминированными и случайными: первые получают на основе значений некоторой неслучайной функции; вторые есть результат реализации некоторой случайной величины.

Особо следует выделить стационарные и нестационарные ряды. Ряд $y(t)$ называется *стационарным* (в узком смысле), если закон распределения вероятностей случайной величины $y(t)$ не зависит от t.

В дальнейшем, если не оговорено иначе, будем рассматривать одномерные, дискретные с равноотстоящими моментами наблюдений, случайные временные ряды.

При исследовании рядов динамики возникает ряд трудностей.

♦ Характерной чертой временных рядов является существенность порядка наблюдений, в то время как в случайной выборке порядок следования элементов не важен.

♦ Ряды экономических показателей содержат долговременные тенденции – тренды.

♦ Выборка содержит сравнительно немного элементов, что затрудняет прогнозирование исследуемых явлений.

♦ Экономические ряды динамики часто являются сильно автокоррелированными.

♦ Возможно существование временных лагов между рядами.

♦ При построении многофакторных регрессионных моделей по рядам динамики часто возникает проблема мультиколлинеарности.

♦ Развитие экономических процессов и явлений происходит непрерывно, но реально исследовать можно лишь дискретные по времени значения процесса.

♦ Члены временного ряда не являются одинаково распределенными.

Целью анализа временного ряда является достижение понимания причинных механизмов, обусловивших появление этого ряда. Поскольку в реальности ряд может отражать один из аспектов сложного явления, порождающего несколько динамических рядов, то на практике ограничиваются изучением типа поведения отдельного ряда и построением моделей, которые объясняют этот тип поведения.

2.2. Компоненты временных рядов

В общем случае при исследовании динамических рядов экономических показателей выделяют следующие четыре основные составляющие:

- устойчивую систематически изменяющуюся долговременную составляющую - *тренд* - T,
- циклические колебания C,
- сезонную составляющую S,
- случайную составляющую U.

Пусть временным рядом является последовательность $y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_n$.

Первые три составляющие часто объединяют в одну детерминированную и рассматривают модель ряда в виде $y_t=f(t)+u_t$, $\forall t$. Изменение уровня $f(t)$ в зависимости от времени называют при этом *трендом*.

Тренд является долговременной тенденцией изменения, обусловленной ростом популяции, технологическими изменениями и другими долговременными воздействиями.

Циклическая (конъюнктурная) составляющая проявляется на протяжении длительного времени и является результатом действия факторов, обладающих большим последействием, либо циклически изменяющихся со временем. Характерным примером служат циклы деловой активности, демографические и астрофизические циклы. Циклическое изменение не обязательно периодично.

Сезонная составляющая обусловлена действием некоторого периодически повторяющегося в определенное время года механизма.

Случайная составляющая не поддается учету и регистрации, образована в результате суперпозиции большого числа внешних факторов, не участвующих в формировании детерминированной составляющей.

Предметом анализа временного ряда является выделение и изучение указанных компонент ряда. Как правило - в рамках одной из моделей ряда, либо аддитивной $Y=T+C+S+U$, либо мультипликативной $Y=T\cdot C\cdot S\cdot U$.

Некоторые составляющие могут отсутствовать в тех или иных рядах.

В результате анализа временного ряда необходимо определить, какие из неслучайных составляющих присутствуют в разложении ряда, построить для них хорошие оценки, подобрать модель, описывающую поведение остатков и оценить ее параметры.

2.3. Проверка гипотезы о существовании тренда

Для выявления факта наличия или отсутствия неслучайной составляющей $f(t)$, то есть для проверки гипотезы о существовании тренда - H_0: $\mathbf{E}y(t)=a=\text{const}$, используют следующие критерии.

I. *Критерий серий*. Упорядочим члены ряда по возрастанию: $y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_n$. Определим медиану ряда:

$$y_{med}=\begin{cases} y_{\frac{n+1}{2}}, \text{ если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{1}{2}\left(y_{\frac{n}{2}}+y_{\frac{n}{2}+1}\right), \text{ если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Образуем последовательность плюсов и минусов, соответствующую исходному ряду, по правилу: если $y_t>y_{med}$, то y_t соответствует плюс, если $y_t<y_{med}$, то – минус. Под серией понимается последовательность подряд идущих плюсов и подряд идущих минусов. Подсчитаем общее число серий ν и протяженность самой длинной серии τ.

Если хотя бы одно из неравенств:

$$\nu > \left[\frac{1}{2}\left(n + 2 - 1{,}96\sqrt{n-1}\right)\right],$$

$$\tau < \left[1{,}43\ln(n+1)\right]$$

окажется нарушенным, то гипотеза H_0 отвергается с вероятностью ошибки α, заключенной между 0,05 и 0,0975.

II. *Критерий «восходящих» и «нисходящих» серий*. Аналогично предыдущему критерию исследуется последовательность плюсов и минусов. Правило построения последовательности: если y_{t+1}-y_t>0, то y_t соответствует плюс, если y_{t+1}-y_t<0, то – минус (если подряд идут несколько равных наблюдений, то во внимание принимается одно из них).

Если хотя бы одно из неравенств:

$$\nu > \left[\frac{1}{3}(2n-1) - 1{,}96\sqrt{\frac{16n-29}{90}}\right],$$

$$\tau < \tau_0$$

окажется нарушенным, то гипотеза H_0 отвергается с вероятностью ошибки α, заключенной между 0,05 и 0,0975. Величина τ_0 определяется в зависимости от n:

n	$n \le 26$	$26 < n \le 153$	$153 < n \le 1170$
τ_0	$\tau_0=5$	$\tau_0=6$	$\tau_0=7$

III. Критерий квадратов последовательных разностей (критерий Аббе). Если есть основания полагать, что разброс наблюдений y_t относительно своих средних значений подчиняется нормальному закону распределения вероятностей, то применяется критерий Аббе (см. [1], с. 801-802).

3. Показатели динамики. Методы выделения тренда

3.1. Основные показатели динамики социально-экономических явлений

Различают показатели тенденции динамики и средние показатели тенденции динамики. Пусть временным рядом является последовательность y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_n. Рассмотрим некоторые показатели, характеризующие тенденцию динамики ряда:

- Абсолютное изменение уровней ряда: цепное - $\Delta y_t = y(t)-y(t-1)$, базисное - $\Delta y^0_t = y(t)-y(0)$.
- Темп роста: цепной – $K_t = y(t)/y(t-1)$, базисный $K^0_t = y(t)/y(0)$.
- Темп прироста (относительный прирост): цепной $k_t = \Delta y_t / y(t-1)$, базис-

ный $k_t^0=\Delta y^0_t/y(0)$.

Некоторые соотношения между показателями динамики:

1. Сумма цепных абсолютных изменений равна базисному абсолютному изменению: $\Sigma\Delta y_t=\Delta y^0_t$.
2. Произведение цепных темпов изменения равно базисному темпу изменения: $\Pi K_t=K^0_t$.
3. Абсолютное значение 1% прироста равно сотой части предыдущего уровня, или базисного уровня.

Средние показатели тенденции динамики используются для обобщения характеристик тренда за длительный период, по различным периодам, для сравнения развития за неодинаковые промежутки времени, для выбора аналитического выражения для тренда. К средним показателям относятся:

- Средний уровень ряда: $\bar{y}=\sum_{t=1}^{n} y_t \Big/ n$.
- Средний абсолютный прирост: $\bar{\Delta}=\dfrac{y_n-y_0}{n}$.
- Средний темп изменения: $\bar{k}=\sqrt[n]{\dfrac{y_n}{y_0}}$.

3.2. Регрессионные модели для выделения тренда

Поскольку под трендом понимается некоторая устойчивая и долговременная тенденция изменения, то компоненту, соответствующую тренду, можно приблизить полиномом от t некоторой степени p.

Пусть, как и ранее, задан ряд $y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_n$. Тогда можно для получения представления о тренде положить:

$$y_t=a_0+a_1t+...+a_pt^p. \quad (1)$$

Полином первой степени отражает равномерное во времени возрастание или убывание значений ряда. Полином второй степени может выражать тенденцию возрастания и последующего убывания значений ряда или наоборот и т.д. Обычно p мало по сравнению с n. Для получения оценок коэффициентов в формуле (1) может быть использована техника регрессионного анализа. Вопрос о степени полинома решается для каждой задачи отдельно на основе проверки гипотез о равенстве нулю коэффициентов при старших степенях в формуле (1) до тех пор, пока гипотеза о равенстве нулю коэффициента a_p отклоняется.

Иногда во временных рядах проявляются тренды, которые описываются функциями, нелинейными по параметрам, подлежащим оценке: экспоненциальной – $y_t=ak^t$, где k – темп изменения в разах, логарифмической – $y_t=a_0+a_1\log t$, степенной – $y_t = a_0 t^{a_1}$, гиперболической $y_t=a_0+a_1/t$, логистической – $y_t = \dfrac{k}{1+\alpha e^{-\lambda t}}$ и др. Регрессионный анализ в этом случае проводится с помощью методов наименьших квадратов после линеаризующих преобразований или нелинейного метода наименьших квадратов.

3.3. Сглаживание временных рядов с помощью скользящей средней

Альтернативой нахождению некоторой аппроксимирующей функции, которая характеризует ряд целиком, служит поиск полинома, представляющего некоторую часть ряда и использование различных полиномов на отдельных этапах. Это приводит к технике сглаживания.

Сглаживание временного ряда означает представление тренда в данной точке посредством взвешенного среднего значений, наблюдаемых в окрестностях этой точки. Оно определяется для каждого момента времени, за исключением нескольких первых и нескольких последних точек.

Оценим тренд в точке t посредством величины:

$$y_t^* = \sum_{s=-m}^{m} c_s y_{t+s}\ ,\ t=m+1,\ ...,\ n-m,$$

являющейся взвешенным средним наблюдаемых значений y_t в интервале значений t, отстоящих не более чем на m единиц. Веса c_s предполагаются нормированными $\sum_{s=-m}^{m} c_s = 1$. Полученная таким образом последовательность $y_{m+1}^*, \ldots, y_{n-m}^*$ называется *скользящим средним* исходной последовательности y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_n.

Веса c_s легко определяются в результате решения системы нормальных уравнений.

<u>Пример</u>. Нахождение весов скользящих средних.

Пусть необходимо построить наилучшее приближение по пяти точкам (m=2) и нас устраивает аппроксимация квадратичным полиномом $y^*(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$. Определим веса скользящих средних:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{t=-m}^{m} \left(y_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2\right)^2 = 0, j = 0,1,2. \Rightarrow$$

$$\sum_{t=-m}^{m} t^j y_t = a_0 \sum_{t=-m}^{m} t^j + a_1 \sum_{t=-m}^{m} t^{j+1} + a_2 \sum_{t=-m}^{m} t^{j+2}, j = 0,1,2. \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\sum y = 5a_0 + 10a_2, \\ \sum ty = 10a_1, \\ \sum t^2 y = 10a_0 + 34a_2.\end{cases}$$

Из последней системы для a_0 получаем:

$$a_0=(17\Sigma y-5\Sigma t^2 y)/35=(-3y_{t-2}+12y_{t-1}+17y_0+12y_{t+1}-3y_{t+2})/35,$$

то есть веса c_s будут равны: $-\frac{3}{35},\frac{12}{35},\frac{17}{35},\frac{12}{35},-\frac{3}{35}$, что символически записывается в виде $\frac{1}{35}[-3,12,17]$.▲

Метод скользящих средних не дает значений тренда для m первых и m последних членов ряда. Особенно большие неприятности представляет отсутствие значений тренда в конце, если мы хотим экстраполировать ряд. Несмотря на то, что значения тренда в конце не столь устойчивы, как в середине, можно использовать для сглаживания последних m значений ряда полином того же порядка, что и для остальных членов ряда, и получить выражения для весов. Например, для предыдущего примера из системы нормальных уравнений получим:

$$a_1=\Sigma ty/10=(-2y_{t-2}-y_{t-1}+y_{t+1}+2y_{t+2})/10,$$
$$a_2=(\Sigma t^2 y-2\Sigma y)/14=(2y_{t-2}-y_{t-1}-2y_0-y_{t+1}+2y_{t+2})/14,$$

а сглаживающий полином имеет вид:

$$y^*(t)=(-3y_{t-2}+12y_{t-1}+17y_0+12y_{t+1}-3y_{t+2})/35+t(-2y_{t-2}-y_{t-1}+y_{t+1}+2y_{t+2})/10+$$
$$+t^2(2y_{t-2}-y_{t-1}-2y_0-y_{t+1}+2y_{t+2})/14,$$

откуда при t=1, 2 имеем веса скользящих средних для вычисления последних двух значений тренда по пяти (последним) точкам ряда:

$$\frac{1}{35}[-5,6,12,13,9] \text{ и } \frac{1}{35}[3,-5,-3,9,31].$$

Для выбора длины интервала m и степени полинома p, к сожалению, нет никаких простых критериев - это зависит от модели представления ряда и цели выделения тренда.

3.4.Определение порядка аппроксимирующего полинома с помощью метода последовательных разностей

Для определения порядка аппроксимирующего полинома в указанных выше методах выделения тренда широко используется метод последовательных разностей членов анализируемого временного ряда. Метод основан на математическом факте: если временной ряд $y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_n$ содержит в качестве своей неслучайной составляющей алгебраический полином $f(t)=a_0+a_1t+...+a_pt^p$

порядка p, то переход к последовательным разностям $y(1), y(2), \ldots, y(n)$, повторенный p+1 раз (то есть переход к последовательным разностям порядка p+1), исключает неслучайную составляющую (включая константу a_0), оставляя элементы, выражающиеся только через остаточную случайную компоненту $u(t)$.

Алгоритм метода. Последовательно для k=1,2,… вычисляем разности $\Delta^k y(t)$ (t=1,2,…, n-k), а также величины

$$\hat{\sigma}^2(k) = \frac{\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}\left(\Delta^k y(t)\right)^2}{C_{2k}^k}.$$

Анализируем поведение величины $\hat{\sigma}^2(k)$ в зависимости от k. Величина $\hat{\sigma}^2(k)$ будет убывать с ростом k. Начиная с некоторого k=p+1 величина $\hat{\sigma}^2(k)$ стабилизируется, оставаясь приблизительно на одном уровне при дальнейшем росте k. Это значение k=k_0 и будет давать завышенный на 1 порядок сглаживающего полинома, то есть p= k_0-1.

При применении метода следует иметь в виду следующее. Сходимость $\hat{\sigma}^2(k)$ не доказывает, что ряд первоначально состоял из полинома плюс случайный остаток. Это означает только то, что он может быть приближенно представлен таким образом.

Литература к разделам 1-3: [1-3, 5, 7, 8, 12, 13, 15-19, 24].

Контрольные вопросы.

1. Дайте определения понятий прогноз, прогнозирование.
2. Классификация социально-экономических прогнозов и методов прогнозирования.
3. Что такое временной ряд? Трудности исследования временных рядов.
4. Компоненты временных рядов и их характеристика.
5. Статистические критерии проверки существования тренда.
6. Какие методы выделения тренда вы знаете? Когда они применяются? Каковы их достоинства и недостатки?
7. Как определить порядок аппроксимирующего полинома?
8. Какие обобщенные модели временных рядов вы знаете? В чем суть анализа временного ряда?

Задания для самостоятельной работы.

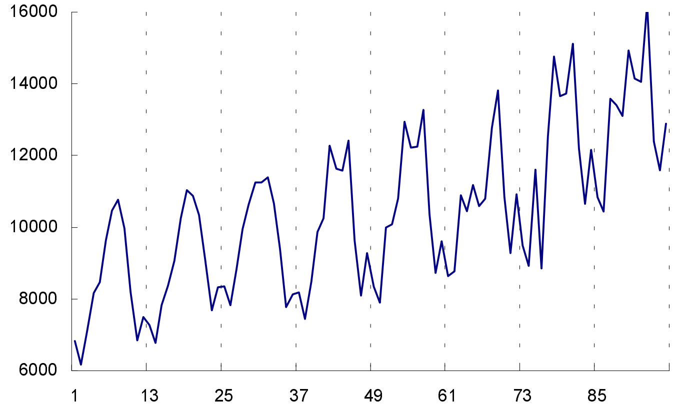
1. Найдите веса скользящих средних для приближения по четырем точкам и аппроксимации линейным полиномом $y^*(t)=a_0+a_1t$.

2. В файле spurious (www.econ.kuleuven.ac.be/gme/) содержится информация о двух временных рядах, обозначенных x и y. Протестируйте ряды на наличие тренда. Какие компоненты содержатся в указанных рядах?

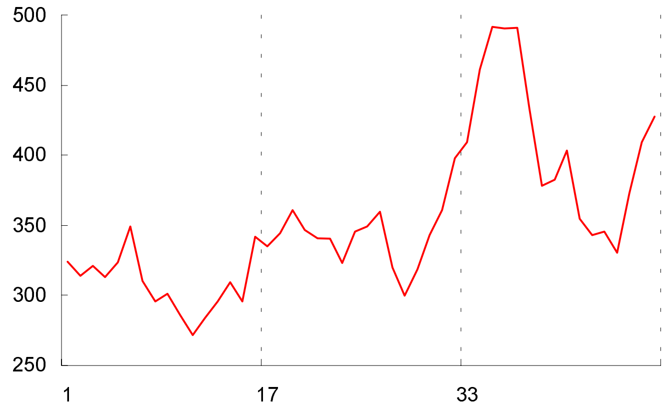
на наличие тренда. Какие компоненты содержатся в указанных рядах?

3. Проанализируйте ряды данных, исходя из принятого разложения ряда на компоненты.

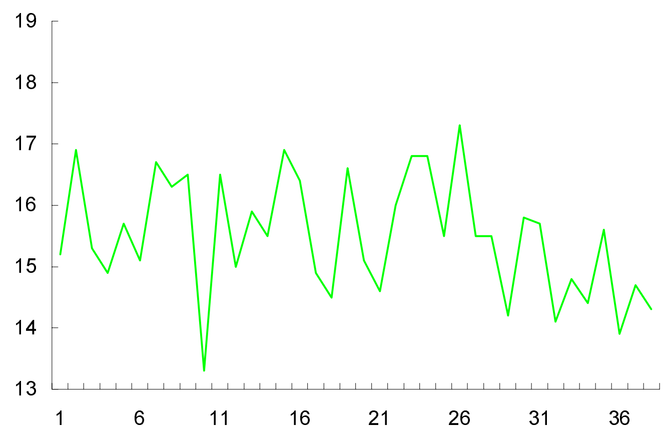
3.1. Расстояния, пройденные самолетами Великобритании с января 1963 г. по декабрь 1970 г., тыс. миль (n=96, Δt=1 месяц)



3.2. Квартальная динамика среднего индекса курса акций ведущих компаний на лондонской бирже за 1960-1971 гг. (n=48, Δt=1 квартал)



3.3. Урожайность ячменя в Англии и Уэльсе 1884-1921 гг., ц/акр (n=38, Δt=1 год)



4. Для ряда 3.2. задачи 3 проверьте гипотезу о существовании тренда с помощью критерия восходящих и нисходящих серий.

Ряд 3.2. (по строкам)

323,8	314,1	321	312,9	323,7	349,3	310,4	295,8	301,2
285,8	271,7	283,6	295,7	309,3	295,7	342	335,1	344,4
360,9	346,5	340,6	340,3	323,3	345,6	349,3	359,7	320
299,9	318,5	343,1	360,8	397,8	409,1	461,1	491,4	490,5
491	433	378	382,6	403,4	354,7	343	345,4	330,4
372,8	409,2	427,6						

5. Выделите тренд для ряда 3.1. задачи 3 методом скользящей средней по пяти точкам (m=2), используя аппроксимацию квадратичным полиномом.

Год/Месяц	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
I	6827	7269	8350	8186	8334	8639	9491	10840
II	6178	6775	7829	7444	7899	8772	8919	10436
III	7084	7819	8829	8484	9994	10894	11607	13589
IV	8162	8371	9948	9864	10078	10455	8852	13402
V	8462	9069	10638	10252	10801	11179	12537	13103
VI	9644	10248	11253	12282	12950	10588	14759	14933
VII	10466	11030	11254	11637	12222	10794	13667	14147
VIII	10768	10882	11391	11577	12246	12770	13731	14057
IX	9963	10333	10665	12417	13281	13812	15110	16234
X	8194	9109	9396	9637	10366	10857	12185	12389
XI	6848	7685	7775	8094	8730	9280	10645	11595
XII	7500	8325	8125	9280	9614	10928	12161	12889

4. Периодические колебания во временных рядах

4.1. Методы выделения сезонных колебаний

Во многих временных рядах проявляется сезонный фактор в виде периодических регулярных колебаний. Как правило, наблюдения в таких рядах даны через определенные интервалы: ежеквартально, ежемесячно, еженедельно. Пусть выбрана аддитивная модель ряда. Представляется, что невозможно установить полностью объективное правило, разделяющее тренд и сезонность. Однако те или иные методы позволяют приближенно оценить сезонные колебания.

Метод 1. Простейший путь оценки сезонности для ряда $y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_n$ с периодом сезонности τ (τ=12 для ежемесячных данных, τ=4 для ежеквартальных данных) $h=n/\tau$ заключается в вычислении разности между средним по всем одноименным месяцам (кварталам) и средним по всем данным:

$$\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{h-1} y_{t+\tau j} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ t=1,...,\tau .$$

Метод 2. Альтернативный метод оценивания состоит в выделении тренда скользящими средними, например, по формуле (m=τ/2):

$$y_t^* = \frac{1}{\tau}\left[\sum_{s=-(m-1)}^{m-1} y_{t+s} + \frac{1}{2}y_{t-m} + \frac{1}{2}y_{t+m}\right], t = m+1,\ldots,n-m,$$

и использовании отклонений от сглаженных значений в качестве оценок сезонности:

$$\frac{1}{h-1}\sum_{j=1}^{h-1}\left(y_{t+\tau j} - y^*_{t+\tau j}\right), t = \overline{1,m},$$

$$\frac{1}{h-1}\sum_{j=0}^{h-2}\left(y_{t+\tau j} - y^*_{t+\tau j}\right), t = \overline{m+1, 2m}.$$

Если выбирается мультипликативная модель ряда, то в последней формуле вместо разностей берется отношение.

Если тренд ярко выражен, лучше работать с моделью log$y$=log$T$+log$S$+U.

Пример. Имеются следующие данные об индексе объема выпуска промышленной продукции в РФ:

Год/ Мес.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1991	196,5	214,5	223,6	208,9	206,0	204,5	213,1	221,4	215,7	196,8	181,7	203,7
1992	169,2	189,3	198,0	185,8	170,5	169,7	174,2	167,9	170,6	165,5	162,0	180,8
1993	141,8	170,7	177,4	164,3	151,9	160,6	151,7	154,8	153,9	147,8	145,6	149,7
1994	102,1	123,8	128,6	115,8	108,8	112,0	106,5	115,1	114,6	110,5	117,7	109,7
1995	104,1	101,9	103,0	97,0	102,4	99,7	98,0	101,4	103,9	97,6	95,9	95,2

Визуально предполагаем наличие сезонной компоненты:

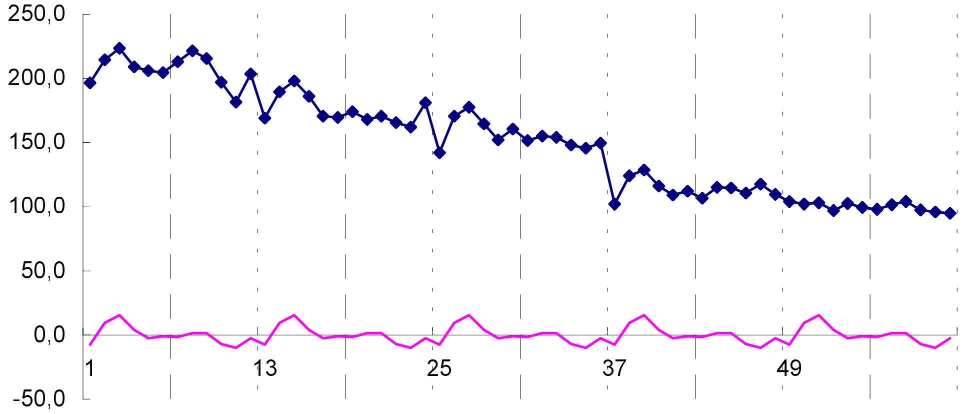


Рис. 2. Индекс объема выпуска промышленной продукции

Применяя метод 1, получим следующие оценки сезонности по месяцам:

Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Оцен-ка	-7,7	9,6	15,7	3,9	-2,5	-1,1	-1,7	1,7	1,3	-6,8	-9,9	-2,6

График сезонной компоненты дан на рис. 2 внизу. Видно, что выпуск промышленной продукции в РФ имеет сезонный характер зима-лето. ▲

4.2. Методы выделения циклических колебаний

Циклические колебания часто встречаются в экономических временных рядах, что обусловлено, в частности, циклами деловой активности. Рассмотрим ряд, в котором на случайную составляющую наложены стандартные предположения метода наименьших квадратов.

Пусть ряд содержит циклическую составляющую, выраженную некоторой функцией от времени $C(t)$ с известными периодами, нацело делящими n. То есть периоды $C(t)$ задаются числами n/k_j, j=1,...,q, где (k_1,.., k_q) - подмножество последовательности целых чисел 1,...,(n-1)/2, если n нечетное, или 1,..., n/2-1, если n четное. Представим $C(t)$ в виде ряда Фурье - линейной комбинации синусов и косинусов для n нечетного:

$$C(t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q}\left[\alpha(k_j)\cos\frac{2\pi k_j}{n}t + \beta(k_j)\sin\frac{2\pi k_j}{n}t\right], \tag{2}$$

и для n четного:

$$C(t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q}\left[\alpha(k_j)\cos\frac{2\pi k_j}{n}t + \beta(k_j)\sin\frac{2\pi k_j}{n}t\right] + \alpha_{n/2}(-1)^t. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь задачу *гармонического анализа* ряда, состоящую в оценивании параметров α_0, $\alpha_{n/2}$, $\alpha(k_j)$ и $\beta(k_j)$. Обозначим оценки метода наименьших квадратов для этих параметров a_0, $a_{n/2}$, $a(k_j)$, $b(k_j)$ соответственно. Тогда нормальные уравнения для этих оценок будут иметь вид (n - четное):

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n/2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a(k_1) \\ b(k_1) \\ \vdots \\ b(k_q) \\ a_{n/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \cos\frac{2\pi k_1}{n}t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \sin\frac{2\pi k_1}{n}t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \sin\frac{2\pi k_q}{n}t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t(-1)^t \end{pmatrix}.$$

Решение нормальных уравнений будет:

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t,$$

$$a(k_j) = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t \cos\frac{2\pi k_j}{n}t,\ j = \overline{1,q},$$

$$b(k_j) = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t \sin\frac{2\pi k_j}{n}t,\ j = \overline{1,q},$$

$$a_{n/2} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t (-1)^t.$$

Аналогичный вид решение имеет и для n нечетного (без формулы для оценки $a_{n/2}$).

Для полученных оценок могут быть построены доверительные интервалы и проверены гипотезы, как это делается для модели множественной регрессии. Причем эти процедуры упрощаются из-за ортогональности и нормировки используемых переменных. Интерес также представляет вопрос о критериях включения в циклическую составляющую тех или иных тригонометрических слагаемых и о количестве гармоник [2].

Пример. Для предыдущих данных оценим циклическую компоненту.

Будем иметь, предполагая k_1=12, n=60, a_0=150,4, $a_{n/2}$=0,8, $a(k_1)$=-2,5, $b(k_1)$=1,2. График циклической компоненты, вычисленный по формуле (3), дан на рис. 3. ▲

Часто под сезонной компонентой временного ряда понимают процесс, в формировании которого присутствуют сезонные и циклические факторы.

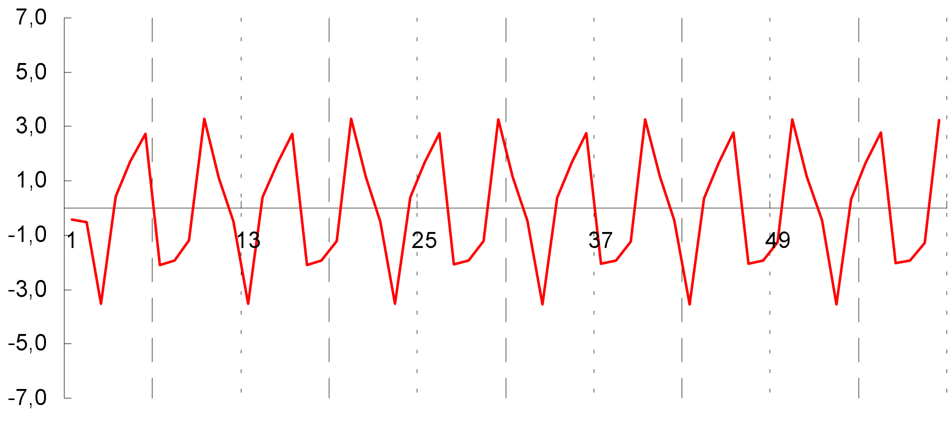


Рис. 3.

Литература к разделу 4: [1-3, 5, 7, 12, 13, 15, 17].

Контрольные вопросы.

1. Какие вы знаете методы выделения сезонных и циклических колебаний?

2. В чем отличие сезонной компоненты временного ряда от циклической?

3. В чем суть гармонического анализа временного ряда?

4. Как построить прогноз сезонной компоненты временного ряда?

Задания для самостоятельной работы.

1. Имеется ряд динамики импорта КНР по кварталам за 1993-1995 гг. и 1 квартал 1996 г., млрд. $:

Год	1993				1994				1995				1996
Квартал	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I
Значение импорта	15,8	21,5	24,8	33,1	18,7	26,4	26,5	34,5	21,9	30,0	31,2	38,1	26,4

Выделите сезонные колебания, используя:

1.1. Разность между средним по одноименным кварталам и средним по всем данным;

1.2. Отношение между средним по одноименным кварталам и средним по всем данным;

1.3. Отклонения от тренда;

1.4. Гармонический анализ.

2. Постройте в полярных координатах график сезонных колебаний ряда задачи 1, выделенных методом 1.4.

3. Сделайте выводы по результатам решения задач 1 и 2.

4. Исходные данные. В файле ppp (www.econ.kuleuven.ac.be/gme/) содержится информация об индексе цен и ставке процента во Франции и Италии с января 1981 г. по июнь 1996 г. Описание переменных:

lnit: логарифм индекса цен в Италии,

lnfr: логарифм индекса цен во Франции,

lnp: lnit-lnfr,

lnx: логарифм ставки процента Франция/Италия,

cpiit: индекс потребительских цен в Италии,

cpifr: индекс потребительских цен во Франции.

Что вы можете сказать о сезонных изменениях индекса цен?

5. Файл income (www.econ.kuleuven.ac.be/gme/) содержит нескорректированные поквартальные данные для суммарного персонального располагаемого дохода и потребительских расходов в Великобритании с 1 квартала 1971 г. по 2 квартал 1985 г. Переменные даны в миллионах фунтов в текущих ценах. Выделите тренд и сезонную компоненту.

5. Адаптивные методы прогнозирования

5.1. Сущность адаптивных методов. Экспоненциальное сглаживание

Слово «адаптация» (от лат. adaptatio) означает приспособление строения и функций явлений и процессов к условиям существования. Применительно к прогнозированию процесс адаптации состоит в следующем. Пусть по модели ряда из некоторого исходного состояния делается прогноз. Ждем, пока не пройдет одна единица времени, и сравниваем результат прогнозирования с фактически реализовавшимся значением. Ошибка прогнозирования через обратную связь поступает на вход системы и используется для корректировки (подстройки) модели с целью большего согласования своего поведения с динамикой ряда. Затем делается прогноз на следующий момент времени и т.д. Поэтому ценность различных членов ряда в адаптивных методах неодинакова. Больший вес и информационная ценность придается наблюдениям, ближайшим к точке прогнозирования.

Отметим, что деление моделей на адаптивные и неадаптивные достаточно условно. Практическое применение адаптивных методов возможно посредством **экспоненциального сглаживания**.

Пусть имеется ряд $y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_n$. Предполагаем, что модель ряда суть: $y_t=a_0+u_t$, где a_0 – параметр.

Экспоненциальное сглаживание является обобщением метода скользящего среднего и осуществляется по формуле Р.Брауна:

$$S_t=\alpha y_t+\beta S_{t-1}, \qquad (4)$$

где S_t - значение экспоненциальной средней в момент t, α - параметр сглаживания, $\alpha=const$, $0<\alpha<1$, $\beta=1-\alpha$.

С другой стороны формулу (4) можно переписать так:

$S_t=\alpha y_t+\beta S_{t-1}=\alpha y_t+\alpha\beta y_{t-1}+\beta^2 S_{t-2}=\ldots=\alpha\sum_{i=0}^{n-1}\beta^i y_{t-i}+\beta^n S_0$. Так как $\beta<1$, то при $n\to\infty$, $\beta^n\to 0$, а $\alpha\sum_{i=0}^{n-1}\beta^i\to 1$ и $S_t=\alpha\sum_{i=0}^{n-1}\beta^i y_{t-i}$. То есть, экспоненциальная средняя – взвешенная сумма всех членов ряда, с падающими экспоненциально весами в зависимости от давности наблюдений.

В качестве прогнозной модели в момент t на τ единиц времени вперед используем $\hat{y}_\tau(t)=\hat{a}_0=S_t$, где $\hat{y}_\tau(t)$ - значение прогноза.

Если S_{t-1} рассматривать как прогноз на 1 шаг вперед, то величина $(y_t - S_{t-1})$ есть погрешность этого прогноза, а новый прогноз S_t получается в результате корректировки предыдущего прогноза с учетом его ошибки: $S_t=\alpha y_t+\beta S_{t-1}=S_{t-1}+\alpha(y_t-S_{t-1})$. В этом и состоит суть процесса адаптации модели к исходным данным.

При краткосрочном прогнозировании желательно как можно быстрее отразить изменения ряда и в то же время как можно лучше «очистить» ряд от случайных колебаний. Таким образом, с одной стороны, следует увеличивать вес более свежих наблюдений, повышая α, с другой стороны, для сглаживания случайных отклонений величину α нужно уменьшать. Поиск компромиссного значения α составляет задачу оптимизации модели. Наилучшее значение α зависит от срока прогнозирования τ. Для конъюнктурных прогнозов в большей мере должна учитываться свежая информация. При увеличении τ более поздняя информация, отражающая последнюю конъюнктуру, должна, по-видимому, иметь несколько меньший вес, чем в случае малых τ.

Практически значение α может быть рассчитано по формуле $\alpha=2/(n+1)$ или определено, исходя из эвристических соображений.

В качестве начального значения S_0 может быть принято среднее арифметическое всех имеющихся точек ряда или его части.

5.2. Адаптивные полиномиальные модели

Экспоненциальная средняя произвольного k порядка (k=1,…, p) определяется как:

$$S_t^{[k]} = \alpha S_t^{[k-1]} + \beta S_{t-1}^{[k]}.$$

Если в качестве гипотезы тренда некоторого процесса принимается полином степени p, то метод экспоненциального сглаживания и прогнозирования позволяет вычислить коэффициенты предсказывающего полинома через экспоненциальные средние соответствующих порядков.

Теорема 1 (Р.Браун и Р.Майер). Коэффициенты предсказывающего полинома a_0, a_1, …, a_p связаны с экспоненциальными средними $S_t^{[k]}$, k=1,…, p соотношениями:

$$S_t^{[k]} = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \frac{\hat{a}_i}{i!} \frac{\alpha^k}{(k-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} j^i \beta^j \frac{(k-1+j)!}{j!},$$

То есть, имеется p+1 уравнение для определения коэффициентов полинома по экспоненциальным средним.

При выборе порядка полинома обычно решается вопрос об окупаемости сложности расчетов по выбранной кривой повышением точности прогнозирования. На практике используются модели не выше второго порядка.

Обозначим ожидаемое значение y_t в момент $T_k+\tau$ через $\hat{y}_\tau(T_k)$, где τ - время упреждения, на которое делается прогноз, T_k - текущий момент времени и рассмотрим адаптивные полиномиальные модели Р.Брауна. Вывод формул опустим.

Адаптивная полиномиальная модель нулевого порядка.

Гипотеза о тренде: $f(t)=a_0$.

Экспоненциальная средняя: $S_t=\alpha y_t+\beta S_{t-1}$.

Начальное условие: $S_t=\hat{a}_{0,0}$.

Оценка коэффициента: $\hat{a}_{0,T_k}=S_{T_k}$.

Прогноз: $\hat{y}_\tau(T_k)=\hat{a}_{0,T_k}=S_{T_k}$.

Адаптивная полиномиальная модель первого порядка.

Гипотеза: $f(t)=a_0+a_1t$.

Экспоненциальные средние: $S_t=\alpha y_t+\beta S_{t-1}$, $S_t^{[2]}=\alpha S_t+\beta S_{t-1}^{[2]}$.

Начальные условия: $S_0=\hat{a}_{0,0}-\dfrac{\beta}{\alpha}\hat{a}_{1,0}$, $S_0^{[2]}=\hat{a}_{0,0}-\dfrac{2\beta}{\alpha}\hat{a}_{1,0}$.

Оценки коэффициентов: $\hat{a}_{0,T_k}=2S_{T_k}-S_{T_k}^{[2]}$, $\hat{a}_{1,T_k}=\dfrac{\alpha}{\beta}(S_{T_k}-S_{T_k}^{[2]})$.

Прогноз: $\hat{y}_\tau(T_k)=\hat{a}_{0,T_k}+\tau\hat{a}_{1,T_k}=(2+\dfrac{\alpha}{\beta}\tau)S_{T_k}-(1+\dfrac{\alpha}{\beta}\tau)S_{T_k}^{[2]}$.

Адаптивная полиномиальная модель второго порядка.

Гипотеза: $f(t)=a_0+a_1t+0{,}5a_2t^2$.

Экспоненциальные средние: $S_t=\alpha y_t+\beta S_{t-1}$, $S_t^{[2]}=\alpha S_t+\beta S_{t-1}^{[2]}$, $S_t^{[3]}=\alpha S_t^{[2]}+\beta S_{t-1}^{[3]}$.

Начальные условия: $S_0=\hat{a}_{0,0}-\dfrac{\beta}{\alpha}\hat{a}_{1,0}+\dfrac{\beta(2-\alpha)}{2\alpha^2}\hat{a}_{2,0}$,

$$S_0^{[2]}=\hat{a}_{0,0}-\frac{2\beta}{\alpha}\hat{a}_{1,0}+\frac{\beta(3-2\alpha)}{\alpha^2}\hat{a}_{2,0},\ S_0^{[3]}=\hat{a}_{0,0}-\frac{3\beta}{\alpha}\hat{a}_{1,0}+\frac{3\beta(4-3\alpha)}{2\alpha^2}\hat{a}_{2,0}.$$

Оценки коэффициентов: $\hat{a}_{0,T_k}=3S_{T_k}-3S_{T_k}^{[2]}+S_{T_k}^{[3]}$,

$$\hat{a}_{1,T_k}=\frac{\alpha}{2\beta^2}[(6-5\alpha)S_{T_k}-2(5-4\alpha)S_{T_k}^{[2]}+(4-3\alpha)S_{T_k}^{[3]}],$$

$$\hat{a}_{2,T_k}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}[S_{T_k}-2S_{T_k}^{[2]}+S_{T_k}^{[3]}].$$

Прогноз: $\hat{y}_\tau(T_k)=\hat{a}_{0,T_k}+\tau\hat{a}_{1,T_k}+\dfrac{1}{2}\tau^2a_{2,T_k}=[6\beta^2+(6-5\alpha)\alpha\tau+\alpha^2\tau^2]\dfrac{S_{T_k}}{2\beta^2}-$

$$-[6\beta^2+2(5-4\alpha)\alpha\tau+2\alpha^2\tau^2]\frac{S_{T_k}^{[2]}}{2\beta^2}+[2\lambda^2+(4-3\alpha)\alpha\tau+\alpha^2\tau^2]\frac{S_{T_k}^{[3]}}{2\beta^2}.$$

Во всех моделях начальные условия $\hat{a}_{i,0}, i=0,1,2$ могут быть получены как коэффициенты полиномов, сглаживающих исходный ряд и рассчитанных по методу наименьших квадратов.

Модели Р.Брауна имеют следующие положительные черты: логичная, ясная концепция; оптимальное значение единственного параметра можно найти эмпирическим путем; коэффициенты модели прогнозирования оцениваются совместно таким образом, чтобы уменьшить автокорреляцию в остатках.

Главный же недостаток этих моделей в том, что они рассматривают временной ряд изолированно от других явлений, и если даже имеется дополнительная информация, она может быть использована лишь путем регулирования скорости адаптации.

Существенным недостатком является то, что вся специфика ряда должна быть отражена в единственном параметре α, что ограничивает класс моделей, допустимых в рамках метода экспоненциального сглаживания.

5.3. Модель Хольта

Ч.Хольт одним из первых ослабил ограничения метода Р.Брауна, связанные с его однопараметричностью. В его двухпараметрической модели линейного роста прогноз на τ тактов времени вперед в момент t определяется как:

$$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{0,t} + \tau\hat{a}_{1,t}\,.$$

Оценка коэффициентов адаптивного полинома первого порядка осуществляется по формулам:

$$\hat{a}_{0,t} = \alpha_1 y_t + \beta_1\left(\hat{a}_{0,t-1} + \hat{a}_{1,t-1}\right),$$
$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_2\left(\hat{a}_{0,t} - \hat{a}_{0,t-1}\right) + \beta_2\hat{a}_{1,t-1},$$

где α_1, α_2 – параметры экспоненциального сглаживания $0<\alpha_1$, $\alpha_2<1$, $\beta_1=1-\alpha_1$, $\beta_2=1-\alpha_2$.

Последние уравнения можно переписать в виде:

$$\hat{a}_{0,t} = \hat{a}_{0,t-1} + \hat{a}_{1,t-1} + \alpha_1 e_t\,,$$
$$\hat{a}_{1,t} = \hat{a}_{1,t-1} + \alpha_1\alpha_2 e_t\,,$$

где $e_t=y_t-\hat{y}_1(t-1)$ - ошибка прогноза.

Таким образом, прогноз является функцией прошлых и текущих данных, параметров α_1, α_2, а также начальных значений $\hat{a}_{0,0}, \hat{a}_{1,0}$.

5.4. Модели Уинтерса и Тейла-Вейджа

Модель Уинтерса является развитием модели Хольта и учитывает сезонность, причем мультипликативно. Модель имеет вид:

$$\hat{y}_\tau(t) = \left(\hat{a}_{0,t} + \tau\hat{a}_{1,t}\right)\hat{s}_{t+\tau-l}\,,$$

где l – количество фаз в полном сезонном цикле (l=12 при месячных данных, l=4 при квартальных данных и т.п.), $\hat{s}_{t+\tau-l}$ - оценка сезонности. Оценка коэффициентов модели Уинтерса осуществляется по формулам:

$$\hat{a}_{0,t} = \alpha_1 \frac{y_t}{\hat{s}_{t-l}} + \beta_1\left(\hat{a}_{0,t-1} + \hat{a}_{1,t-1}\right),$$

$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_2\left(\hat{a}_{0,t} - \hat{a}_{0,t-1}\right) + \beta_2 \hat{a}_{1,t-1},$$

$$\hat{s}_t = \alpha_3 \frac{y_t}{\hat{a}_{0,t}} + \beta_3 \hat{s}_{t-l},$$

где α_1, α_2, α_3 – параметры экспоненциального сглаживания $0<\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3<1$, $\beta_1=1-\alpha_1$, $\beta_2=1-\alpha_2$, $\beta_3=1-\alpha_3$. Из этого следует, что в рассматриваемом методе используется три параметра сглаживания.

Прогноз является функцией прошлых и текущих данных, параметров α_1, α_2, α_3, а также начальных значений $\hat{a}_{0,0}, \hat{a}_{1,0}, \hat{s}_0$.

Уинтерс предлагает оптимальные значения параметров адаптации находить экспериментально с помощью сетки значений α_1, α_2, α_3 (перебор значений параметров от 0 до 1 с некоторым шагом, например, 0,1) по минимуму стандартного отклонения ошибки сглаживания.

Экономические данные чаще всего содержат сезонность именно в мультипликативной форме. Однако Тейл и Вейдж предложили аддитивную модель сезонности, которая относительно проще в вычислительной реализации. Первоначальный временной ряд в этом случае, как правило, заменяется логарифмами значений. Модель имеет вид:

$$y_\tau(t) = a_{0,t} + s_t + u_t,$$

$$a_{0,t} = a_{0,t-1} + a_{1,t},$$

где $a_{0,t}$ - величина уровня процесса после элиминирования сезонных колебаний, $a_{1,t}$ - аддитивный коэффициент роста, s_t - аддитивный коэффициент сезонности, u_t – белый шум.

Прогнозная модель Тейла и Вейджа имеет вид:

$$\hat{y}_\tau(t) = \hat{a}_{0,t} + \tau \hat{a}_{1,t} + \hat{s}_{t+\tau-l}.$$

Оценка коэффициентов модели:

$$\hat{a}_{0,t} = \alpha_1\left(y_t - \hat{s}_{t-1}\right) + \beta_1\left(\hat{a}_{0,t-1} + \hat{a}_{1,t-1}\right),$$

$$\hat{a}_{1,t} = \alpha_2\left(\hat{a}_{0,t} - \hat{a}_{0,t-1}\right) + \beta_2 \hat{a}_{1,t-1},$$

$$\hat{s}_t = \alpha_3\left(y_t - \hat{a}_{0,t}\right) + \beta_3 \hat{s}_{t-l},$$

где α_1, α_2, α_3 – параметры экспоненциального сглаживания $0<\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3<1$, $\beta_1=1-\alpha_1$, $\beta_2=1-\alpha_2$, $\beta_3=1-\alpha_3$. В данном методе также используется три параметра сглаживания.

Литература к разделу 5: [1, 3, 12, 13, 17].

Контрольные вопросы.

1. В чем отличие адаптивных методов прогнозирования от остальных?

2. В каких случаях оправданно применение метода экспоненциального сглаживания?

3. Преимущества адаптивных полиномиальных моделей Р.Брауна.

4. Как повысить точность прогнозирования с использованием адаптивных моделей?

5. Объясните, как выбирается параметр сглаживания?

6. В чем преимущества модели Тейла-Вейджа?

Задания для самостоятельной работы.

1. Исходные данные содержат ряд динамики, характеризующий добычу газа в РФ по месяцам за 1996-1997 гг., млрд. м^3:

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1996	56,8	53,2	56,3	51,7	46,9	44,3	44	42,2	44,2	52,5	52,6	56,1
1997	57,4	51,5	54,2	48,7	45	39,3	37,9	37,6	40,7	48,6	53,8	56,9

Постройте по данным за 1997 г. адаптивную полиномиальную модель первого порядка, приняв $\hat{a}_{0,0}$=51,7, $\hat{a}_{1,0}$= -0,2, α=0,9. Найдите стандартное среднеквадратическое отклонение ошибки ретроспективного прогноза.

2. Постройте модель Хольта по данным за 1997 г., приняв $\hat{a}_{0,0}$=60, $\hat{a}_{1,0}$= -0,2, α_1=α_2=0,8. Найдите стандартное отклонение ошибки ретроспективного прогноза. Сравните результаты с полученными в задаче 1.

3. Постройте модель Уинтерса. Исходные данные - в задаче 1. Начальные условия - $\hat{a}_{0,0}$=60, $\hat{a}_{1,0}$= -0,2, $\hat{s}_0$=1. Параметры модели принять равными α_1=α_2=0,1, α_3=0,9. Сравните результаты с расчетами в задачах 1 и 2. Сделайте выводы.

4. Постройте модель Тейла-Вейджа по данным задачи 1. Выберите начальные условия и значения параметров модели, исходя из минимального значения стандартного отклонения ошибки ретроспективного прогноза. Сравните полученный результат с расчетами в задаче 3. Сделайте вывод.

6. Модели стационарных и нестационарных временных рядов и их идентификация

6.1. Модели авторегрессии порядка *p* (AutoRegressive - *AR*(*p*) models)

Достаточно часто экономические показатели, представленные в виде временного ряда, имеют сложную структуру. Моделирование таких рядов путем построения модели тренда, сезонности и периодической составляющей не приводит к удовлетворительным результатам. Ряд остатков часто имеет статистические закономерности. Наиболее распространенными моделями стационарных рядов являются модели авторегрессии и модели скользящего среднего.

Будем рассматривать класс стационарных временных рядов. Задача состоит в построении модели остатков временного ряда u_t и прогнозирования его значений.

Авторегрессионная модель предназначена для описания стационарных временных рядов. Стационарный процесс удовлетворяет уравнению авторегрессии бесконечного порядка, с достаточно быстро убывающими коэффициентами. В частности, поэтому авторегрессионная модель достаточно высокого порядка может хорошо аппроксимировать почти любой стационарный процесс. В связи с этим модель авторегрессии часто применяется для моделирования остатков в той или иной параметрической модели, например, регрессионной модели или модели тренда.

Модель авторегрессии порядка 1 $AR(1)$ (марковский процесс).

Марковскими называются процессы, в которых состояние объекта в каждый следующий момент времени определяется только состоянием в настоящий момент и не зависит от того, каким путем объект достиг этого состояния. В терминах корреляционного анализа для временных рядов марковский процесс можно описать следующим образом: существует статистически значимая корреляционная связь исходного ряда с рядом, сдвинутым на один временной интервал и отсутствует с рядами, сдвинутыми на два, три и т. д. временных интервала. В идеальном случае эти коэффициенты корреляции равны нулю.

Авторегрессионная модель первого порядка определяется соотношением:

$$u(t)=\mu\, u(t\text{-}1)+\varepsilon(t)\,, \tag{5}$$

где μ - числовой коэффициент $|\mu|<1$, $\varepsilon(t)$ – последовательность случайных величин, образующих «белый шум» ($\mathbf{E}(\varepsilon(t))=0$, $\mathbf{E}(\varepsilon(t)\varepsilon(t+\tau))=\begin{cases}\sigma^2, \tau=0\\ 0,\ \tau\neq 0\end{cases}$).

Модель (5) называется также марковским процессом.

Имеем:

$$\mathbf{E}(u(t))\equiv 0. \tag{6.1}$$

Докажем тождество (6.1).

$$u_t=\mu u_{t-1}+\varepsilon_t=\mu(\mu u_{t-2}+\varepsilon_{t-1})+\varepsilon_t=\mu^2 u_{t-2}+\mu\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t=\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\varepsilon_{t-k}\,.$$

Откуда с учетом $\mathbf{E}(\varepsilon(t))=0$ получим $\mathbf{E}(u(t))=0$.

$$r(u(t)u(t\pm\tau))=\mu^\tau. \tag{6.2}$$

$$\mathbf{D}u(t)=\sigma^2/(1\text{-}\mu^2). \tag{6.3}$$

$$\mathrm{cov}(u(t)u(t\pm\tau))=\mu^\tau\mathbf{D}u(t). \tag{6.4}$$

Из (6.3) следует, что при $|\mu|$ близком к единице дисперсия $u(t)$ будет намного больше дисперсии ε_t. Это значит (учитывая (6.2) $\mu=r(u(t)u(t\pm1))=r(1)$ – интерпретация параметра μ), что в случае сильной корреляции соседних значений ряда $u(t)$ ряд слабых возмущений ε_t будет порождать размашистые колебания остатков $u(t)$.

Условие стационарности ряда (5) определяется требованием $|\mu|<1$.

Автокорреляционная функция (АКФ) $r(\tau)$ марковского процесса определяется соотношением (6.2).

Частная автокорреляционная функция

$$r_{част}(\tau)=r(u(t)u(t+\tau)) \mid u(t+1)=u(t+2)=\ldots=u(t+\tau-1)=0$$

может быть вычислена по формуле: $r_{част}(2)=(r(2)-r^2(1))/(1-r^2(1))$. Для второго и выше порядков (см. [1], с. 413, 414) должно быть $r_{част}(\tau)=0\ \forall\tau=2,3,\ldots$. Это удобно использовать для подбора модели (5): если вычисленные по оцененным невязкам $u(t)=y_t-\hat{f}_t$ выборочные частные корреляции статистически незначимо отличаются от нуля при $\tau=2,3,\ldots$, то использование модели $AR(1)$ для описания случайных остатков не противоречит исходным данным.

Идентификация модели. Требуется статистически оценить параметры μ и σ^2 модели (5) по имеющимся значениям исходного ряда y_t. Выделяем неслучайную составляющую $\hat{f}_t$ и получаем невязки $\hat{u}_t=y_t-\hat{f}_t$. Находим дисперсию невязок $\hat{\gamma}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\hat{u}_t-\bar{u})^2$, где $\bar{u}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t$ (для большинства методов выделения $\hat{f}_t$ автоматически $\bar{u}=0$). Используя метод моментов и (6.2), (6.3), получим формулы для оценки параметров модели (5):

$$\hat{\mu}=\frac{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}(\hat{u}_t-\bar{u})(\hat{u}_{t+1}-\bar{u})}{\hat{\gamma}},$$

$$\hat{\sigma}^2=(1-\hat{\mu}^2)\hat{\gamma}.$$

Модель авторегрессии порядка 2 – AR(2) (процесс Юла).

Авторегрессионная модель второго порядка определяется соотношением:

$$u(t)=\mu_1u(t-1)+\mu_2u(t-2)+\varepsilon(t), \tag{7}$$

где $\varepsilon(t)$ – последовательность случайных величин, образующих белый шум.

Умножим обе части формулы (7) по очереди на $u(t-1)$ и $u(t-2)$ и возьмем математическое ожидание от двух соотношений:

$\mathbf{E}(u(t)u(t-1))=\mu_1\mathbf{E}(u(t-1)u(t-1))+\mu_2\mathbf{E}(u(t-2)u(t-1))+\mathbf{E}(\varepsilon(t)u(t-1))$,

$\mathbf{E}(u(t)u(t-2))=\mu_1\mathbf{E}(u(t-1)u(t-2))+\mu_2\mathbf{E}(u(t-2)u(t-2))+\mathbf{E}(\varepsilon(t)u(t-2))$ или

$\gamma(1)-\mu_1\mathbf{D}u(t)-\mu_2\gamma(1)=0$,

$\gamma(2)-\mu_1\gamma(1)-\mu_2\mathbf{D}u(t)=0$, или после деления обоих уравнений на $\mathbf{D}u(t)$:

$$\begin{cases} r(1) - \mu_1 - \mu_2 r(1) = 0, \\ r(2) - \mu_1 r(1) - \mu_2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Разрешая систему уравнений (8) относительно μ_1 и μ_2, получим:

$$\mu_1 = \frac{r(1)(1 - r(2))}{1 - r^2(1)}, \qquad \mu_2 = \frac{r(2) - r^2(1)}{1 - r^2(1)}. \tag{9}$$

Разрешая систему уравнений (8) относительно $r(1)$ и $r(2)$, получим:

$$r(1) = \frac{\mu_1}{1 - \mu_2}, \quad r(2) = \mu_2 + \frac{\mu_1^2}{1 - \mu_2}. \tag{10}$$

Если обе части формулы (7) умножить на $u(t\text{-}\tau)$ и взять математическое ожидание, то получим рекуррентную формулу для вычисления значений АКФ (аналог (6.2)):

$$r(\tau) = \mu_1 r(\tau-1) + \mu_2 r(\tau-2). \tag{11}$$

Умножим обе части формулы (7) на $u(t)$ и возьмем математическое ожидание:

$$\mathbf{E}(u(t)u(t)) = \mu_1 \mathbf{E}(u(t-1)u(t)) + \mu_2 \mathbf{E}(u(t-2)u(t)) + \mathbf{E}(\varepsilon(t)u(t)),$$

$$\mathbf{D}u(t) = \mu_1\gamma(1) + \mu_2\gamma(2) + \mathbf{E}[\varepsilon(t)(\mu_1 u(t-1) + \mu_2 u(t-2) + \varepsilon(t))],$$

$$\mathbf{D}u(t) = \mu_1\gamma(1) + \mu_2\gamma(2) + \sigma^2,$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}u(t) - \mu_1\gamma(1) - \mu_2\gamma(2) = \mathbf{D}u(t)[1 - \mu_1 r(1) - \mu_2 r(2)] = \{\text{по (10)}\} =$$

$$= \mathbf{D}u(t)\left[1 - \frac{\mu_1^2}{1-\mu_2} - \mu_2^2 - \frac{\mu_1^2\mu_2}{1-\mu_2}\right] = \mathbf{D}u(t)\left[(1-\mu_2)(1+\mu_2) - \frac{\mu_1^2(1+\mu_2)}{1-\mu_2}\right] \Rightarrow$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}u(t)\frac{1+\mu_2}{1-\mu_2}\left[(1-\mu_2)^2 - \mu_1^2\right]. \tag{12}$$

Условия стационарности ряда (7) могут быть получены из требований к коэффициентам автокорреляции (10):

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{\mu_1}{1-\mu_2} < 1, \\ -1 < \mu_2 + \dfrac{\mu_1^2}{1-\mu_2} < 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\mu_1| < 2, \\ \mu_2 < 1 - |\mu_1|. \end{cases}$$

Из последнего условия и условия (10) следует, что не всякие значения $r(1)$ и $r(2)$ подходят для описания процесса Юла:

$$\begin{cases} -1 < r(1) < 1, \\ -1 < r(2) < 1, \\ r(2) > 2r^2(1) - 1. \end{cases}$$

Для подбора модели используется свойство: должно выполняться

$r_{част}(\tau)=0\ \forall\tau=3,\ 4,\ \ldots$. Если вычисленные по оцененным невязкам $u(t)=y_t-\hat{f}_t$ выборочные частные корреляции статистически незначимо отличаются от нуля при $\tau=3,\ 4,\ \ldots$, то использование модели $AR(2)$ для описания случайных остатков не противоречит исходным данным.

Идентификация модели. Требуется статистически оценить параметры μ_1, μ_2 и σ^2 модели (7) по имеющимся значениям исходного ряда y_t. Выделяем неслучайную составляющую $\hat{f}_t$ и получаем невязки $\hat{u}_t = y_t - \hat{f}_t$. Находим дисперсию невязок $\hat{\gamma} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\hat{u}_t - \overline{u})^2$, где $\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t$ (для большинства методов выделения $\hat{f}_t$ автоматически $\overline{u}=0$) и автокорреляции $\hat{r}(1)$, $\hat{r}(2)$: $\hat{r}(k) = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}(\hat{u}_t - \overline{u})(\hat{u}_{t+k} - \overline{u})\Big/\hat{\gamma},\ k=1,2$. Подставив в (9) $\hat{r}(1)$ и $\hat{r}(2)$, получим оценки параметров $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$, используя которые по (12) будем иметь оценку σ^2.

Модели авторегрессии p порядка – $AR(p)$ при $p\geq3$ (см., например, [1], с. 834-837):

$$u(t)=\mu_1 u(t-1)+\mu_2 u(t-2)+\ldots+\varepsilon(t). \tag{13}$$

<u>Пример</u>. График первой разности ряда, хорошо описывающейся моделью $AR(1)$, представленной на рис. 4; график выборочной автокорреляционной функции (АКФ) первой разности этого ряда представлен на рис. 5. ▲

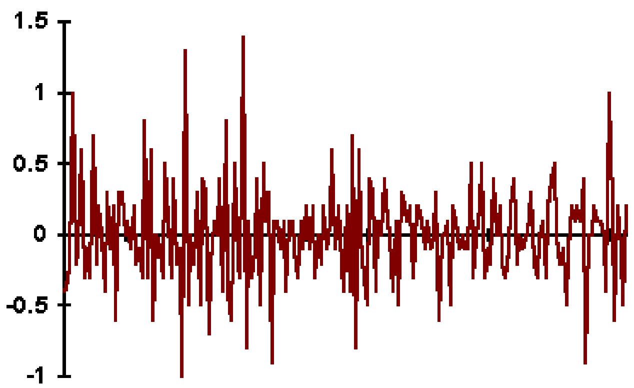


Рис. 4

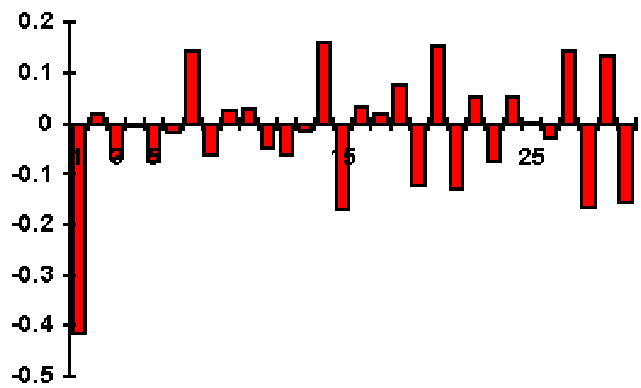


Рис. 5

6.2. Модели скользящего среднего порядка *q* (Moving Average - *MA*(*q*) models)

При рассмотрении экспоненциального сглаживания речь шла о том, что на показатель в текущий момент времени оказывает воздействие значение показателя в предыдущие моменты. Хотя воздействие отдаленных элементов незначительно, но в сумме оно может оказывать существенное влияние на модель. Учесть это воздействие возможно в модели скользящего среднего. Моделирование воздействия всех предшествующих элементов ряда на показатель в текущий момент основано на предпосылке о том, что в ошибках модели за несколько предшествующих периодов сосредоточена информация о всей предыстории ряда.

Моделью скользящего среднего порядка q называется процесс:

$$u(t)=\varepsilon(t)-\theta_1\varepsilon(t-1)-\theta_2\varepsilon(t-2)-\ldots-\theta_q\varepsilon(t-q). \tag{14}$$

В частности, модели порядка 1 и 2 соответственно имеют вид:

$$u(t)=\varepsilon(t)-\theta\varepsilon(t-1), \tag{15}$$

$$u(t)=\varepsilon(t)-\theta_1\varepsilon(t-1)-\theta_2\varepsilon(t-2). \tag{16}$$

Переход от формы (13) к форме (14) осуществляется с помощью последовательной подстановки в правую часть формулы (13) вместо $u(t-1)$, $u(t-2)$, … их выражений, вычисленных по формуле (13) для моментов времени t-1, t-2, …. Это означает двойственность в представлении анализируемого временного ряда – две эквивалентные формы линейного процесса - и обратимость *AR* и *MA* моделей.

В качестве примера рассмотрим *модель скользящего среднего первого порядка – MA(1)*. Данная модель описывается соотношением (15). Можно показать, что стационарность $u(t)$ обеспечивается при любом значении параметра θ. Модель обратима (представима в виде модели авторегрессии бесконечного порядка) при условии $|\theta|<1$.

Автокорреляционная функция:

$$r(\tau)=\begin{cases}\dfrac{-\theta}{1+\theta^2}, & \tau=1,\\ 0, & \tau\ge 2.\end{cases}$$

Частная корреляционная функция процесса *MA*(1), определяющая степень тесноты корреляционной связи между $u(t)$ и $u(t\pm\tau)$ при фиксированных значениях всех промежуточных элементов этого ряда, задается выражением:

$$r_{частн}(\tau)=-\theta^{\tau}\,\frac{1-\theta^2}{1-\theta^{2(\tau+1)}}.$$

Идентификация модели *MA*(1). Требуется статистически оценить параметры θ и σ^2 модели (15) по имеющимся значениям исходного ряда y_t. Выделяем неслучайную составляющую $\hat{f}_t$ и получаем невязки $\hat{u}_t=y_t-\hat{f}_t$. Находим оценку автокорреляции $\hat{r}(1)$: $\hat{r}(1)=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n-1}(\hat{u}_t-\bar{u})(\hat{u}_{t+1}-\bar{u})\Big/\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\hat{u}_t-\bar{u})^2$.

Подставляя $\hat{r}(1)$ в выражение для автокорреляционной функции, имеем: $\theta^2+(1/\hat{r}(1))\theta+1=0$, квадратное уравнение для θ. Из двух решений приведенного квадратного уравнения ($\theta_1\theta_2=1$) одно будет меньше единицы – его и выбираем в качестве искомой оценки параметра в модели $MA(1)$.

Оценка σ^2 получается из формулы: $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\hat{u}_t - \bar{u})^2}{1+\hat{\theta}^2}$.

Модель скользящего среднего второго порядка – MA(2) отличается более сложным построением (см. [1], с. 843-845).

Важное практическое значение имеют процессы, первая (или более высокая) разность которых стационарна и является процессом $MA(q)$. Подобные процессы устроены как случайные колебания с непостоянным средним уровнем, или (для второй разности) непостоянным углом наклона. Для прогнозирования подобных процессов часто используют метод экспоненциального сглаживания.

6.3. Модели авторегрессии-скользящего среднего (AutoRegressive - Moving Average - *ARMA*(*p*, *q*) models)

На практике для экономичной параметризации анализируемого процесса иногда бывает необходимо включить в модель как члены, описывающие авторегрессию, так и члены, моделирующие остаток в виде скользящего среднего. Такой линейный процесс имеет вид:

$$u(t)=\mu_1 u(t-1)+\ldots+\mu_p u(t-p)+\varepsilon(t)-\theta_1\varepsilon(t-1)-\ldots-\theta_q\varepsilon(t-q) \qquad (17)$$

и называется процессом авторегрессии - скользящего среднего порядка (p, q) – $ARMA(p, q)$.

Рассмотрим в качестве примера *модель ARMA(1, 1)*. В соответствии с моделью (17), процесс $ARMA(1, 1)$ описывается формулой:

$$u(t)=\mu u(t-1)+\varepsilon(t)-\theta\varepsilon(t-1) \text{ или } u(t)-\mu u(t-1)=\varepsilon(t)-\theta\varepsilon(t-1).$$

Процесс $ARMA(1, 1)$ стационарен, если корень характеристического уравнения $AR(1)$ модели $1-\mu z=0$ по модулю больше единицы. То есть должно быть $|\mu|<1$. Обратимость процесса $ARMA(1, 1)$ обеспечивается требованием, чтобы корень характеристического уравнения $MA(1)$ модели $1-\theta z=0$ по модулю был больше единицы. То есть должно быть $|\theta|<1$.

АКФ: $r(\tau) = \begin{cases} \dfrac{(1-\mu\theta)(\mu-\theta)}{1+\theta^2-2\mu\theta}, \tau=1, \\ \mu r(\tau-1)+\mu^{\tau-1}r(1), \tau \geq 2. \end{cases}$

Автокорреляционная функция экспоненциально убывает от начального значения $r(1)$, причем это убывание монотонно, если μ положительно, и колебательно (знакопеременно), если μ отрицательно.

Из последнего равенства и условий стационарности и обратимости следует, что $r(1)$ и $r(2)$ должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} |r(2)| < |r(1)|, \\ r(2) > r(1)(2r(1)+1),\ r(1) < 0, \\ r(2) > r(1)(2r(1)-1),\ r(1) > 0. \end{cases}$$

Эти условия бывают полезными при проверке гипотезы (по выборочным значениям коэффициентов автокорреляции) о том, что анализируемый процесс может быть описан *ARMA*(1, 1) моделью.

Идентификация модели *ARMA*(1, 1). Требуется статистически оценить параметры μ, θ и σ^2 модели по имеющимся значениям исходного ряда y_t.

Этап 1. Имеем после умножения обеих частей модели на $u(t\text{-}2)$:

$$u(t)u(t-2)-\mu u(t-1)u(t-2)=\varepsilon(t)u(t-2)-\theta_1\varepsilon(t-1)u(t-2) \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}(u(t)u(t-2))-\mu\mathbf{E}(u(t-1)u(t-2))=\mathbf{E}(\varepsilon(t)u(t-2))-\theta\mathbf{E}(\varepsilon(t-1)u(t-2)),$$

или после деления на $\mathbf{D}u(t)$:

$$r(2)-\mu r(1)=0 \Rightarrow \hat{\mu}=\frac{\hat{r}(2)}{\hat{r}(1)}.$$

Этап 2. Выписываем соотношения:

$$u(t)-\hat{\mu}u(t-1)=\varepsilon(t)-\theta\varepsilon(t-1),$$

$$u(t+1)-\hat{\mu}u(t)=\varepsilon(t+1)-\theta\varepsilon(t).$$

Возводя в квадрат первое равенство, перемножая почленно первое со вторым, переходя к математическим ожиданиям полученных выражений:

$$\mathbf{E}(u^2(t))-2\hat{\mu}\mathbf{E}(u(t)u(t-1))+\hat{\mu}^2\mathbf{E}(u^2(t-1))=\mathbf{E}(\varepsilon^2(t))-2\theta\mathbf{E}(\varepsilon(t)\varepsilon(t-1))+\theta^2\mathbf{E}(\varepsilon^2(t-1)),$$

$$\mathbf{E}(u(t)u(t+1))-\hat{\mu}\mathbf{E}(u(t-1)u(t+1))-\hat{\mu}\mathbf{E}(u^2(t))+\hat{\mu}^2\mathbf{E}(u(t-1)u(t))=$$

$$=\mathbf{E}(\varepsilon(t)\varepsilon(t+1))+\theta^2\mathbf{E}(\varepsilon(t-1)\varepsilon(t)).$$

Заменяя ковариации γ их выборочными значениями, получим систему из двух уравнений относительно θ и σ^2:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}\left(1+\hat{\mu}^2\right)-2\hat{\mu}\hat{\gamma}(1)=\sigma^2\left(1+\theta^2\right), \\ \hat{\gamma}(1)\left(1+\hat{\mu}^2\right)-\hat{\mu}\left(\hat{\gamma}+\hat{\gamma}(2)\right)=-\theta\sigma^2. \end{cases}$$

Поделив первое уравнение системы на второе, получим квадратное уравнение относительно θ:

$$A=-(1+\theta^2)/\theta, \text{ где } A=\frac{\hat{\gamma}\left(1+\hat{\mu}^2\right)-2\hat{\mu}\hat{\gamma}(1)}{\hat{\gamma}(1)\left(1+\hat{\mu}^2\right)-\hat{\mu}\left(\hat{\gamma}+\hat{\gamma}(2)\right)}.$$

Из двух корней уравнения выбираем тот, который удовлетворяет условию обратимости $|\theta|<1$. Оценку σ^2 определяем из любого уравнения системы.

6.4. Модель авторегрессии - проинтегрированного скользящего среднего (AutoRegressive Integrated Moving Average - *ARIMA*(*p, q, k*) models)

Модель впервые была предложена Дж.Боксом и Г.Дженкинсом и поэтому известна как модель Бокса-Дженкинса. Это одна из наиболее популярных моделей для построения краткосрочных прогнозов.

Будем рассматривать нестационарные, однородные временные ряды. То есть ряды, для которых случайный остаток $u(t)$, получающийся после вычитания из ряда $y(t)$ его неслучайной составляющей $f(t)$, представляет стационарный временной ряд.

Модель Бокса-Дженкинса предназначена для описания нестационарных временных рядов со следующими свойствами:

а) в рамках аддитивной модели $y(t)$ включает $f(t)$, имеющую вид алгебраического полинома от t степени k-1, причем коэффициенты полинома могут быть как стохастические, так и нестохастические,

б) ряд $y_k(t)$, t=1,2,…, n-k, получившийся из $y(t)$ после применения к нему метода последовательных разностей, может быть описан моделью $ARMA(p, q)$.

Следовательно, модель Бокса-Дженкинса имеет вид:

$$y_k(t)=\mu_1 y_k(t-1)+\ldots+\mu_p y_k(t-p)+\varepsilon(t)-\theta_1\varepsilon(t-1)-\ldots-\theta_q\varepsilon(t-q), \tag{18}$$

где $y_k(t)=\Delta^k y(t)=y(t)-C_k^1 y(t-1)+C_k^2 y(t-2)-\ldots+(-1)^k y(t-k)$, $t=k+1, k+2, \ldots, n$. Здесь Δ^k – k-я последовательная разность анализируемого процесса $y(t)$ ($\Delta=y(t)-y(t-1)$, $\Delta^2=\Delta y(t)-\Delta y(t-1)$ и т.п.).

Введем операторы сдвига во времени: $F_+y_t=y_{t+1}$, $F_-y_t=y_{t-1}$. Причем $F_+F_-=1$, $F^k_-y_t=y_{t-k}$, $F^k_+y_t=y_{t+k}$, $\Delta=1-F_-$. Тогда оператор авторегрессии порядка p $AR(p)$ имеет вид:

$$A_p(F_-, \mu)=1-\mu_1F_- -\mu_2F^2_- - \ldots -\mu_pF^p_- ,$$

а оператор скользящего среднего порядка q $MA(q)$:

$$B_q(F_-, \theta)=1-\theta_1F_- -\theta_2F^2_- - \ldots -\theta_qF^q_- .$$

Модель $ARIMA(p, q, k)$ будет с учетом формулы (18) и введенных операторов иметь вид:

$$A_p(F_-, \mu)\Delta^k y(t)= B_q(F_-, \theta)\varepsilon(t). \tag{18^a}$$

Обозначим S – оператор суммирования – $Sy(t)=y(t)+y(t-1)+y(t-2)+\ldots$. Тогда имеем:

$$Sy(t)=(1+F_-+F^2_-+ \ldots)y(t)=(1-F_-)^{-1}y(t) \text{ или } Sy(t)=\Delta^{-1}y(t)$$

$$\text{и } S^2y(t)=S(Sy(t)),\ S^2y(t)=(\Delta^2)^{-1}y(t) \ldots S^ky(t)=S(S^{k-1}y(t)),\ S^ky(t)=(\Delta^k)^{-1}y(t).$$

То есть оператор S^k является обратным для Δ^k. Применяя оператор S^k к обеим частям (18^a), получим:

$$A_p(F_-, \mu)S^k\{\Delta^k y(t)\}=S^k\{B_q(F_-, \theta)\varepsilon(t)\} \Rightarrow A_p(F_-, \mu)y(t)=S^k\{B_q(F_-, \theta)\varepsilon(t)\}.$$

В последней формуле слева представлен процесс авторегрессии, справа - просуммированного («проинтегрированного») скользящего среднего.

На практике применяются модели $ARIMA(p, q, k)$, в которых p, q, k не превышают 2. Например, $ARIMA(1, 1, 1)$:

$$A_1(F_-, \mu)\Delta y(t) = B_1(F_-, \theta)\varepsilon(t) \Rightarrow (1-\mu F_-)(y_t - y_{t-1}) = (1-\theta F_-)\varepsilon_t \Rightarrow$$

$$y_t - y_{t-1} - \mu y_{t-1} + \mu y_{t-2} = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \Rightarrow$$

$$y(t) = (1+\mu)y(t-1) - \mu y(t-2) + \varepsilon(t) - \theta\varepsilon(t-1).$$

Частным случаем модели *ARIMA* является модель авторегрессии $AR(p)$, для которой $q=k=0$. Другой частный случай - модель скользящего среднего $MA(q)$, для которой $p=k=0$. Важные специальные классы моделей - модели $ARIMA(0, q, k)$, и модели $ARMA(p, q) = ARIMA(p, q, 0)$.

Модель $AR(1)$ при положительном коэффициенте автокорреляции представляет собой колебательный процесс с преобладанием длинных волн. Если коэффициент корреляции отрицателен, процесс является сильно осциллирующим. Модель $ARIMA(0, 1, 1)$ описывает случайный процесс с непостоянным уровнем; его наилучший прогноз может быть построен с помощью метода экспоненциального сглаживания порядка 0. При этом оптимальное значение сглаживающей постоянной связано с коэффициентом скользящего среднего и дисперсией остатков. Аналогичное утверждение справедливо для модели $ARIMA(0, 2, 2)$, описывающей случайный процесс с переменным уровнем и углом наклона. Для его прогнозирования необходимо использовать метод экспоненциального сглаживания первого порядка.

Идентификация *ARIMA* моделей. Структура модели *ARIMA* описывается тремя параметрами (p, q, k). Кроме того, разные по форме модели могут быть довольно близки друг другу. Поэтому весьма важно по возможности правильно определить структуру модели. Рассмотрим этапы идентификации.

1. Подбирается порядок модели k. Для этого используется либо метод последовательных разностей, либо анализ автокорреляционных функций процессов $\Delta y(t)$, $\Delta^2 y(t)$, … - пока не достигнем быстрого затухания (стационарности) автокорреляционной функции для некоторого k. Дж.Бокс и Г.Дженкинс предлагают взять за визуальный критерий стационарности быстрое убывание значений выборочной АКФ. Использование завышенного порядка разности приводит к росту дисперсии ошибок и к заметному росту дисперсии прогноза.

2. Находим $y_k(t) = \Delta^k y(t)$ и идентифицируем $ARMA(p, q)$ модель (см. п.6.3).

Пример. Для определения порядков авторегрессии и скользящего среднего продемонстрируем вид и свойства теоретических АКФ и частной АКФ простейших моделей.

Пример АКФ и частной АКФ для модели $AR(1)$ представлен на рис. 6; 7. Пример АКФ и частной АКФ для модели $AR(2)$ содержится на рис. 8; 9.

Из содержания рис. 6-9 следует, что все значения частной АКФ для лагов, больших порядка авторегрессии p, статистически незначимы.

Пример АКФ и частной АКФ для модели $MA(1)$ изображен на рис. 10; 11.

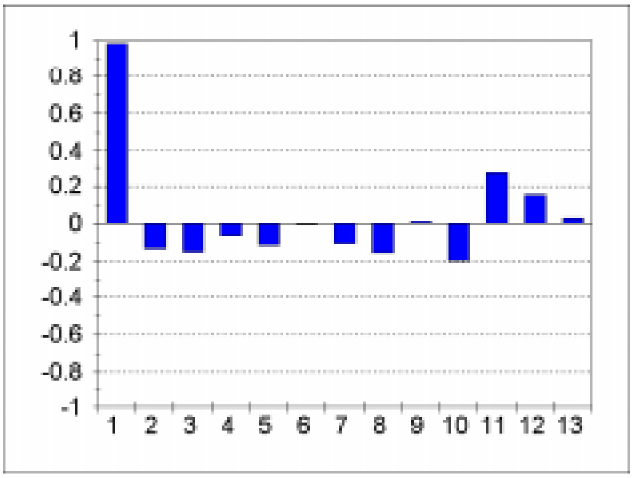


Рис. 6.

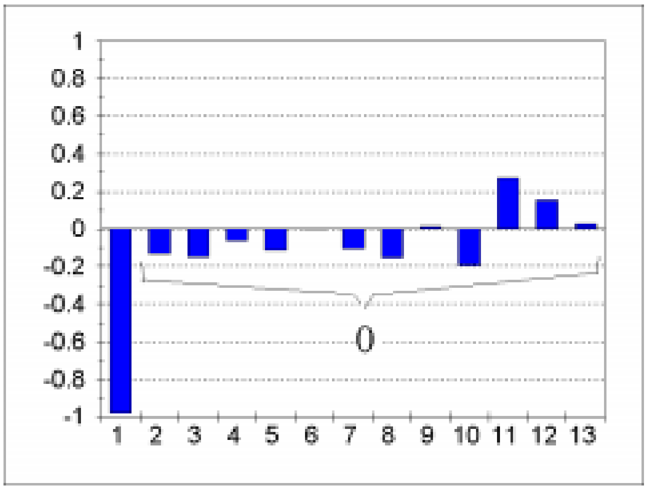


Рис. 7.

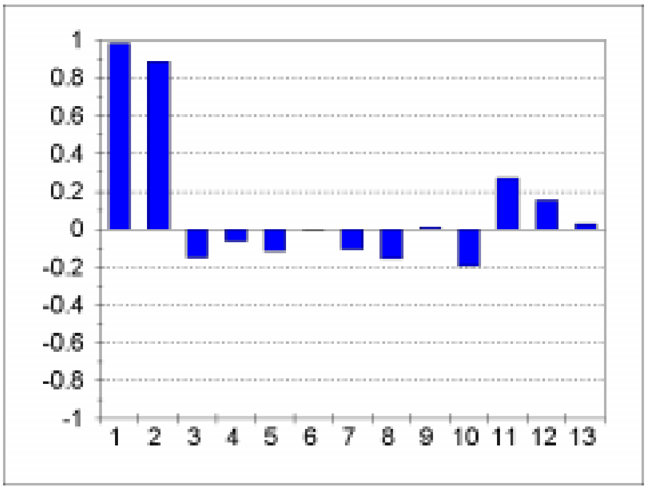


Рис. 8.

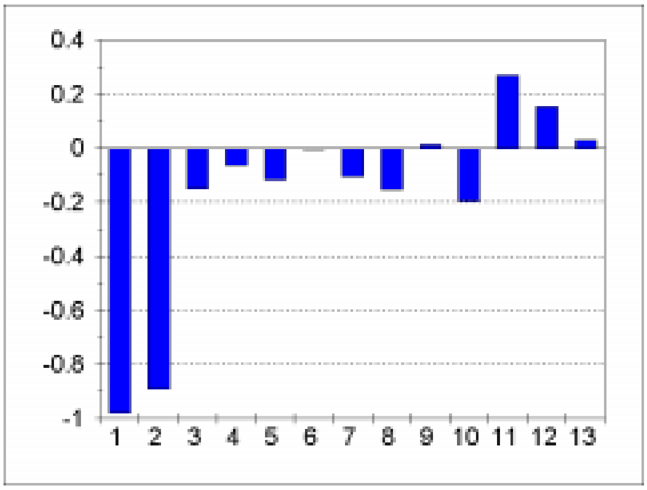


Рис. 9.

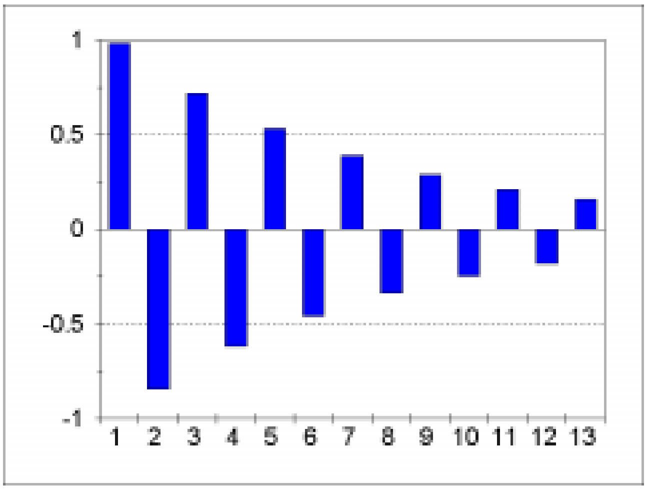


Рис. 10.

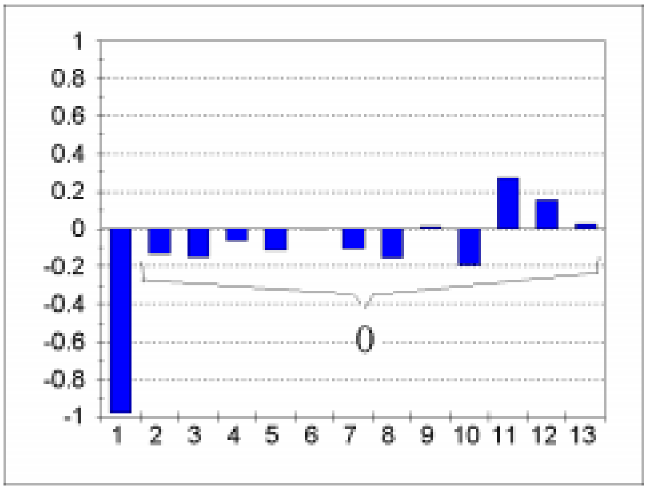


Рис. 11.

Пример АКФ и частной АКФ для модели $MA(2)$ представлен на рис. 12; 13.

Для модели $MA(q)$ все значения АКФ для лагов, больших q, равны нулю. Для модели $ARMA(p, q)$ значения АКФ после лага p-q представляют собой смесь затухающих синусоид и экспонент, а значения частной АКФ ведут себя аналогично после лага q-p. ▲

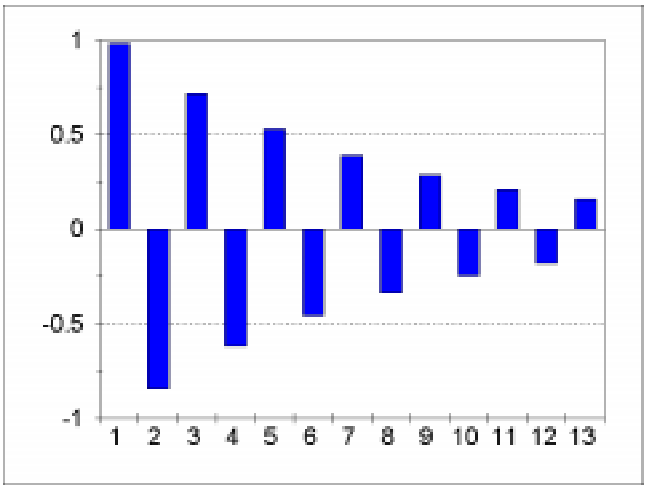


Рис. 12.

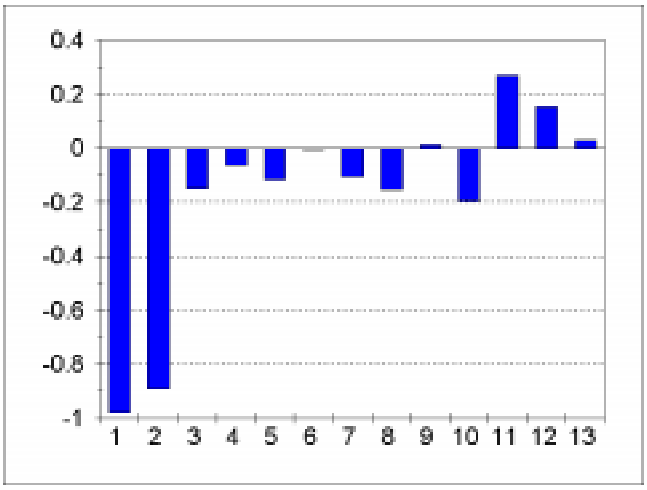


Рис. 13.

Общий подход Бокса-Дженкинса к анализу временных рядов показан на рис. 14. Схема процесса выбора модели временного ряда показана на рис. 15.

Если процесс выбора модели успешно осуществлен, возникает проблема оценки качества построенной модели. Для «хорошей» модели остатки должны быть «белым шумом», т.е. их выборочные автокорреляции не должны значимо отклоняться от нуля. Кроме того, модель не должна содержать лишних параметров, т.е. нельзя уменьшить число параметров без появления значимой автокорреляции остатков. Для диагностики модели необходимо попытаться модифицировать ее, меняя порядки авторегрессии и скользящего среднего. Одновременно повышать оба порядка не рекомендуется ввиду опасности вырождения модели.

6.5. Прогнозирование на основе *ARIMA*(*p*, *q*, *k*) моделей

Обозначим прогноз значений временного ряда на τ шагов времени вперед, сделанный в момент времени *t*: $\hat{y}_\tau(t)$. Согласно общим результатам теории прогнозирования, полученным В.Волдом, А.Колмогоровым, Н.Винером, наилучшим в смысле среднеквадратической ошибки линейным прогнозом в момент времени *t* с упреждением τ является условное математическое ожидание случайной величины $y_\tau(t)$, вычисленное при условии, что все значения $y(t)$ до момента *t* включительно известны.

Для *ARIMA* модели (18)-(18[a]), перенося $y_{t+\tau}$ в левую часть, получаем:

$$y_{t+\tau} = \left(\sum_{i=1}^{p} \mu_p F_-^p\right) y_{t+\tau} - \left(1 - \sum_{i=1}^{p} \mu_p F_-^p\right)\left(C_k^1 y_{t+\tau-1} - \ldots + (-1)^k y_{t+\tau-k}\right) +$$
$$+ \varepsilon_{t+\tau} - \theta_1 \varepsilon_{t+\tau-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t+\tau-q}. \qquad (19)$$

Условное математическое ожидание $E(y_{t+\tau}|y_1, y_2, \ldots, y_t)$ получаем с учетом известных параметров $\mu_1, \ldots, \mu_p, \theta_1, \ldots, \theta_q$ путем применения операции условного усреднения к обеим частям равенства (19) с учетом следующих равенств:

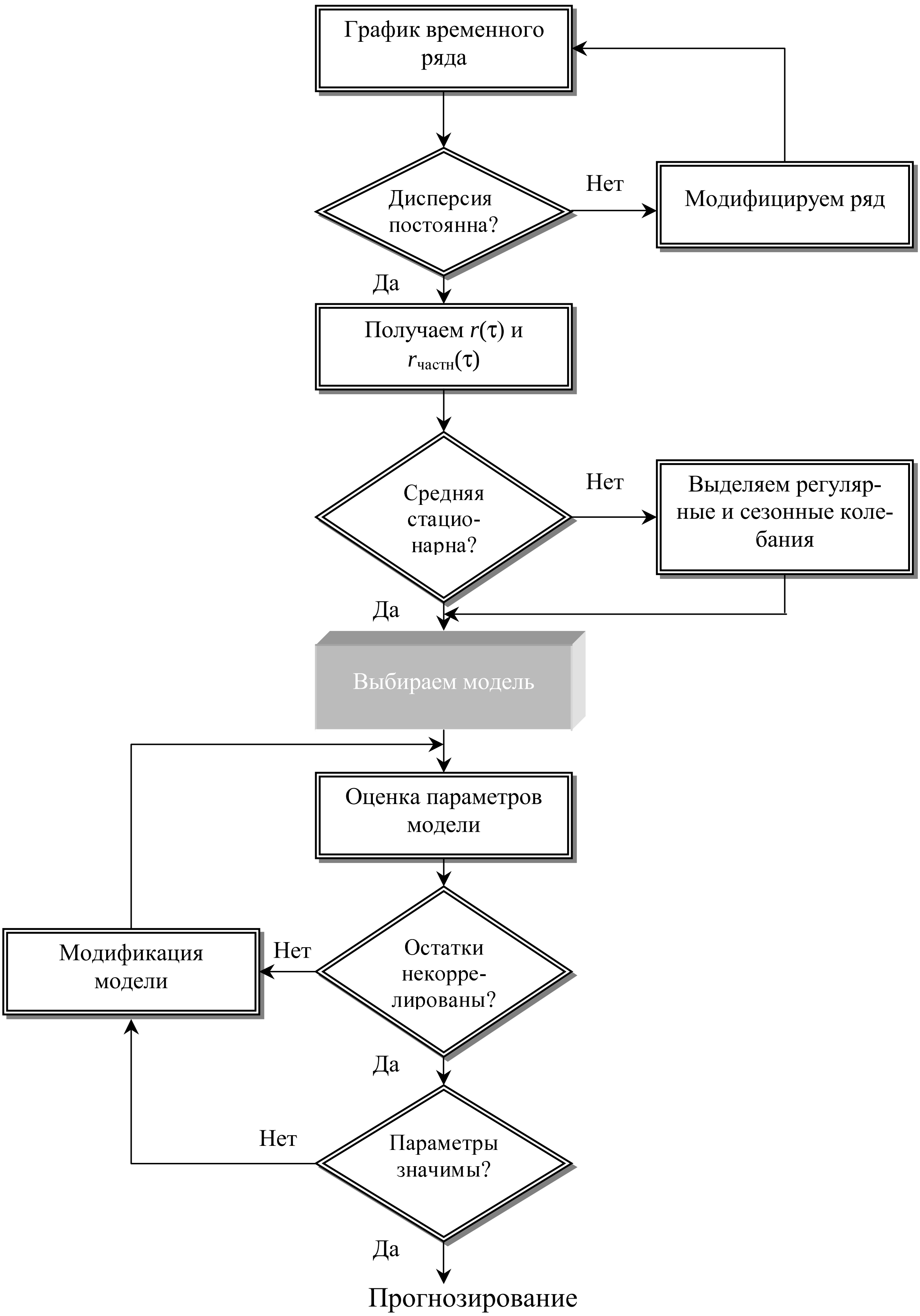


Рис. 14. Подход Бокса-Дженкинса

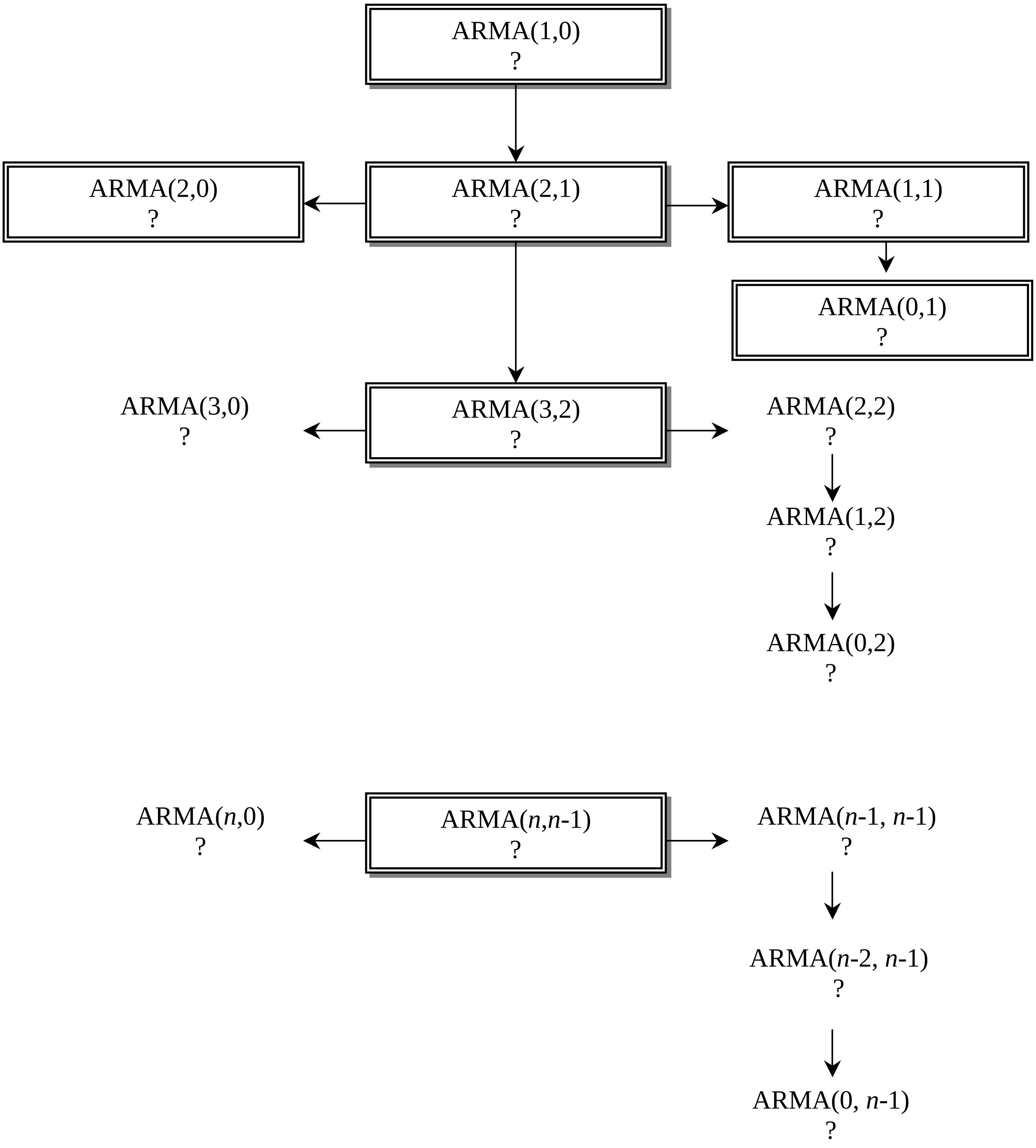


Рис. 15. Процесс выбора *ARIMA* модели

$$E(y_{t-i}\,|y_1, y_2, \ldots, y_t)=y_{t-i} \;\forall\; i=0, 1, 2, \ldots, t-1;$$
$$E(y_{t+i}\,|y_1, y_2, \ldots, y_t)=\hat{y}_i(t) \;\forall\; i=1, 2, \ldots;$$
$$E(\varepsilon_{t+i}\,|y_1, y_2, \ldots, y_t)=0 \;\forall\; i=1, 2, \ldots;$$
$$E(\varepsilon_{t-i}\,|y_1, y_2, \ldots, y_t)=y_{t-i}-\hat{y}_1(t-i-1) \;\forall\; i=0, 1, 2, \ldots \,. \qquad (20)$$

Пример. Модель *ARIMA*(1, 0, 1). С учетом (18^a) модель имеет вид:

$$y(t)=(1+\mu)y(t-1)-\mu y(t-2)+\varepsilon(t),$$

где значение μ известно после идентификации модели. Из уравнения (19) получаем:

$$y_{t+1}=(1+\mu)y_t-\mu y_{t-1}+\varepsilon_{t+1},$$
$$\ldots$$
$$y_{t+\tau}=(1+\mu)y_{t+\tau-1}-\mu y_{t+\tau-2}+\varepsilon_{t+\tau}.$$

Принимая во внимание (20), из последних соотношений будем иметь, полагая будущие значения ε_t равными нулю:

$$\hat{y}_1(t)=(1+\mu)y_t-\mu y_{t-1},$$
$$\hat{y}_2(t)=(1+\mu)\hat{y}_1(t)-\mu y_t,$$
$$\hat{y}_\tau(t)=(1+\mu)\hat{y}_{\tau-1}(t)-\mu\hat{y}_{\tau-2}(t),\ \tau\geq 3.\ \blacktriangle$$

Пример. Рассмотрим использование модели *ARIMA*(1,1,1) для прогнозирования. Исходная модель имеет вид:

$$y(t)=(1+\mu)y(t-1)-\mu y(t-2)+\varepsilon(t)-\theta\varepsilon(t-1),$$

где значения μ, θ известны после идентификации модели. Из уравнения (19) и формул (20) получаем, полагая будущие значения ε_t равными нулю:

$$\hat{y}_1(t)=(1+\mu)y_t-\mu y_{t-1}-\theta\varepsilon(t),$$
$$\hat{y}_\tau(t)=(1+\mu)\hat{y}_{\tau-1}(t)-\mu\hat{y}_{\tau-2}(t),\ \tau\geq 2.$$

Значение $\varepsilon(t)$ можно вычислить по формуле $\varepsilon(t)=y(t)-\hat{y}_1(t-1)$, построив ретроспективный прогноз $\hat{y}_1(t-1)$. В упрощенном варианте можно положить $\varepsilon(t)=0$. ▲

6.6. Модели *ARCH* (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) и *GARCH* (General ARCH)

Для некоторых временных рядов, характеризующих макроэкономические процессы, была выявлена закономерность в поведении случайных остатков. Их малые и большие значения группировались целыми сериями или кластерами. Несмотря на это, гипотеза о гомоскедастичности дисперсии для больших временных интервалов не противоречила данным. Для объяснения этого факта были модифицированы модели *ARMA*(p, q).

Класс моделей временных рядов, в которых учитываются изменения дисперсии и ковариаций, называется моделями *волатильности*.

Пусть мы хотим оценить *ARMA* модель $u(t)=\mu u(t-1)+\varepsilon(t)-\theta\varepsilon(t-1)$ и спрогнозировать $u(t+1)$. Условный прогноз суть: $\mathbf{E}(u(t+1)|u(t))=\mu u(t)$. Дисперсия ошибки прогноза: $\mathbf{E}[(u(t+1)-\mu u(t))^2]=\mathbf{E}[(\varepsilon(t)-\theta\varepsilon(t-1))^2]=\sigma^2(1+\theta^2)$. Если строить безусловный прогноз, усредняя $u(t)$ по всем данным, то получим $u(t+1)=0$. Дисперсия ошибки безусловного прогноза: $\mathbf{E}[(u^2(t+1)]=\sigma^2(1+\theta^2-2\mu\theta)/(1-\mu^2)$. Так как $1/(1-\mu^2) > 1$, то безусловный прогноз имеет большую дисперсию, чем условный. Условный прогноз, учитывающий как текущие, так и прошлые значения ряда, предпочтительнее.

Ключевой особенностью модели *ARCH* является разграничение условных и безусловных моментов второго порядка. В то время как безусловная матрица ковариаций для представляющих интерес переменных может быть неизменной во времени, условные дисперсии и ковариации часто зависят нетривиальным образом от состояний изучаемых явлений или процессов в прошлом. Понимание точного характера этой временной зависимости крайне важно для многих проблем в макроэкономике и финансах, таких как необратимые инвестиции, цены на опционы, структура процентных ставок по срокам и общие динамические соотношения для цен активов. Кроме того, с точки зрения получения эконометрических выводов потеря в асимптотической эффективности из-за не учета гетероскедастичности может быть сколь угодно большой, и при составлении социально-экономических прогнозов, как известно, можно использовать намного более точную оценку неопределенности ошибки прогноза, если получать ее как условную по текущему информационному множеству.

Следуя за Р.Энглом (1982 г.), будем рассматривать остатки $u(t)$ как условно гетероскедастичные и связанные авторегрессией первого порядка:

$$\begin{cases} [u(t)|u(t-1)] \in N(0;\sigma_t^2), \\ \sigma_t^2 = \mathbf{D}(u(t)|u(t-1)) = \mu_0 + \mu_1 u^2(t-1) \end{cases} \tag{21}$$

или, что то же:

$$u(t)=\varepsilon(t)[\mu_0+\mu_1 u^2(t-1)], \tag{21^а}$$

где $\varepsilon(t)$ – нормальный белый шум, $\mu_0>0$, $0<\mu_1<1$.

Модель (21), (21^а) называется авторегрессионной условно гетероскедастичной моделью первого порядка – *ARCH (1)*.

ARCH модель произвольного q порядка имеет вид:

$$u(t)=\varepsilon(t)[\mu_0+\mu_1 u^2(t-1)+\mu_2 u^2(t-2)+\ldots+\mu_q u^2(t-q)]. \tag{21^б}$$

На параметры μ_0, μ_1, … накладываются ограничения, обеспечивающие безусловную гомоскедастичность остатков $u(t)$.

Модель (21^а) можно записать в виде: $u^2(t)=\sigma_t^2+(u^2(t)-\sigma_t^2)=\mu_0+\mu_1 u^2(t-1)+\nu_t$, где $\nu_t=\sigma_t^2(u^2(t)-1)$. Если ν_t – белый шум, то оценки модели *ARCH (1)* могут быть получены методом наименьших квадратов (МНК). Эти оценки являются наилучшими линейными несмещенными оценками, но оказываются неэффективными. Поэтому для нахождения оценок *ARCH* используется метод максимального правдоподобия (квазиправдоподобия), считая, что $u(t)$ имеют нормальную асимптотику.

Прогнозирование. Поскольку величина $\mathbf{E}(y_{T+\tau}|y_T)=0$, то прогнозируется

$\mathbf{E}(y^2_{T+\tau}|y_T)$, которая для *ARCH (1)* суть: $\mathbf{E}\left(y_{T+\tau}^2 \middle| y_T\right)=\mu_0\left(1+\mu_1+\ldots+\mu_1^{\tau-1}\right)+\mu_1^{\tau} y_T^2$. Иногда достаточно часто $y_{T+\tau}|y_T \sim N\{0, \mathbf{E}(y^2_{T+\tau}|y_T)\}$.

<u>Пример</u>. Явление кластеризации волатильности сразу заметно на графиках доходностей активов по времени. Так, на рисунке 16 показаны ежедневные данные по приросту капитальной стоимости ценных бумаг на основе композитных фондовых индексов Standard 90 для 1928-1952гг. и Standard and Poor's 500 для 1953-1990гг. Доходности выражены в процентах и рассчитаны как темпы прироста в непрерывном времени. Анализ графика и любые разумные статистические критерии показывают, что доходности не являются белым шумом по времени. Видно, например, что волатильность была выше в 1930-е гг., чем в 1960-е гг., что подтверждается результатами оценивания. ▲

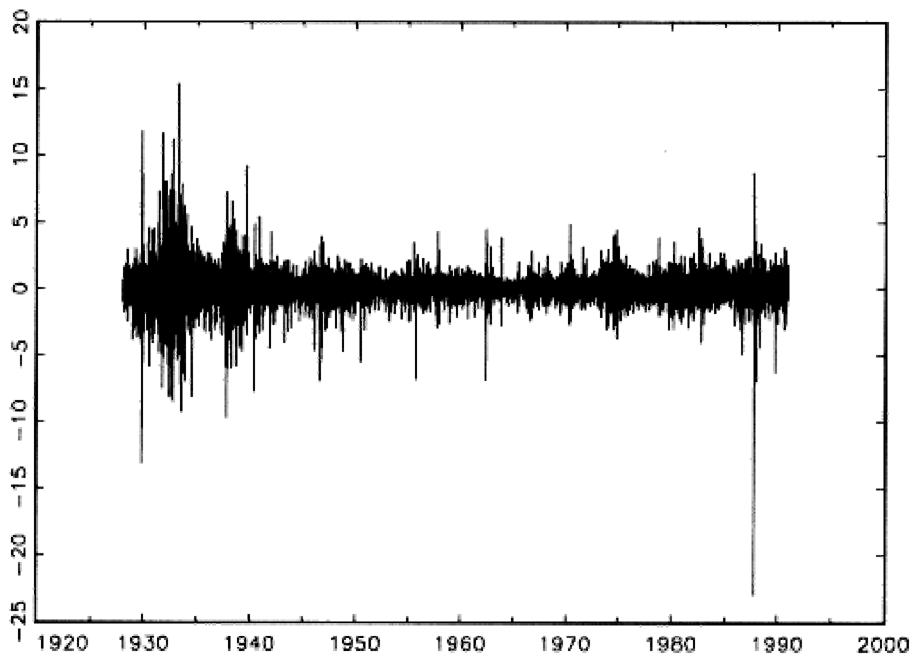


Рис. 16.

Базовая модель (21) может быть распространена в различных направлениях. Наиболее важным является обобщенная *ARCH*, называемая *GARCH*, в которую включены слагаемые, соответствующие скользящим средним:

$$\begin{cases} [u(t)|\psi(t)] \in N(0;\sigma_t^2), \\ \sigma_t^2=\mathbf{D}(u(t)|\psi(t))=\theta_1\sigma_{t-1}^2+\theta_2\sigma_{t-2}^2+\ldots+\theta_p\sigma_{t-p}^2+\mu_0+\mu_1 u(t-1)+\ldots+\mu_q u(t-q). \end{cases} \quad (22)$$

Под ψ понимаем всю информацию о процессе $u(t)$ к моменту времени t (значения $u(\tau)$ и σ^2_τ, $\tau<t$). В простейшем варианте *GARCH* (1, 1):

$$u(t)=\varepsilon(t)[\mu_0+\mu_1 u(t-1)+\theta\sigma_{t-1}^2]. \quad (22^a)$$

Автором модели считается Т.Боллерслев, хотя она независимо была сформулирована С.Тэйлором. Модель (22^a) очень хорошо зарекомендовала себя на практике. Отдельный интерес представляет случай $\mu_1+\theta=1$, указывающий на постоянные всплески волатильности. Соответствующая модель называется интегрированной *GARCH*.

Для нахождения оценок *GARCH* может быть использован метод максимального правдоподобия, считая, что $u(t)$ имеют нормальную асимптотику.

<u>Пример</u>. Регрессия с *GARCH*-процессом в ошибке. Регрессия с *GARCH*-процессом в ошибке имеет вид:

$$y_t = \beta X_t + u_t,\ t = 1, ..., T.$$

Здесь y_t - зависимая переменная, X_t - вектор-строка $1\times m$ независимых переменных, β - вектор-столбец $m\times 1$ коэффициентов регрессии, ε_t - ошибка, представляющая собой *GARCH*-процесс. В матричной записи $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$. ▲

Д.Нельсон предложил экспоненциальную *GARCH* модель (*EGARCH*):

$$u(t)=\varepsilon(t)\exp[\mu_0+\theta\sigma_{t-1}^2+\mu_1\left|\frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right|+\mu_2\frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}}].$$

Модель *EGARCH* несимметрично реагирует на всплески. Асимметрия информации позволяет дисперсии быстрее реагировать на понижение активности рынка, чем на взлеты.

Некоторые другие виды моделей *ARCH*:

Абсолютные остатки. $\sigma_t^2=\mu_0+\mu_1|u(t\text{-}1)|$.

Нелинейные (*NARCH*). $\sigma_t^2=\mu_0+\mu_1|u(t\text{-}1)|^\gamma$.

Пороговые (*TARCH*). $\sigma_t^2=\mu_0+\mu_1 u_{t-1}^2+\mu_2 u_{t-1}^2 d_{t-1}+\theta\sigma_{t-1}^2$, где $d_t=1$, если $u(t)<0$ и 0 в противном случае.

В отличие от рассмотренных выше моделей *ARCH*, которые являются моделями, управляемыми наблюдениями (или данными), в другом классе моделей волатильности – моделях управляемых параметрами – предполагается, что σ_t^2 зависит не от прошлых наблюдений, а от некоторых ненаблюдаемых компонент.

Наиболее широко известна модель стохастической волатильности (*SV* – stochastic volatility) С.Тэйлора:

$$u(t)=\varepsilon(t)\exp[h_t/2],\ h_{t+1}=\mu_0+\mu_1 h_t+\eta_t,$$

где h_t – латентная компонента, которую можно интерпретировать как случайный и неустойчивый поток новой информации, который очень трудно моделировать непосредственно, но можно оценить по данным наблюдений; η_t – гауссовский белый шум. Модель Тэйлора называется логнормальной *SV* моделью. Оценки модели получают обобщенным методом наименьших квадратов. Хотя *SV* модели труднее поддаются статистической трактовке, чем модели управляемые наблюдениями, свойства этих моделей бывает легче обнаруживать, понимать, работать с ними, обобщать на многомерный случай[1].

6.7. Тестирование стационарности временного ряда

Как было отмечено выше, стационарные временные ряды имеют следующие отличительные черты: значения ряда колеблются вокруг постоянного среднего значения с постоянной дисперсией, которая не зависит от времени, АКФ затухает с увеличением лага. При анализе экономических явлений чаще приходится иметь дело с нестационарными временными рядами, которые не имеют постоянного среднего, дисперсия которых зависит от времени, а АКФ затухает очень медленно.

Для подбора модели ряда и прогнозирования его значений необходимо уметь распознавать тип временного ряда.

Рассмотрим процесс авторегрессии первого порядка $y(t)=\mu y(t\text{-}1)+\varepsilon(t)$.

$y(t)$ является стационарным рядом, если $-1<\mu<1$. Если $\mu=1$, то $y(t)$ – нестационарный временной ряд – случайное блуждание со сдвигом: в этом случае считают, что временной ряд $y(t)$ имеет *единичный корень* (unit root).

Вычтем $y(t\text{-}1)$ из обеих частей модели: $\Delta y(t)=\gamma y(t\text{-}1)+\varepsilon(t)$, где $\gamma=\mu\text{-}1$. Дики и Фуллер рассмотрели три регрессии:

$$\Delta y(t)=\gamma y(t\text{-}1)+\varepsilon(t),$$
$$\Delta y(t)=\mu_0+\gamma y(t\text{-}1)+\varepsilon(t),$$
$$\Delta y(t)=\mu_0+\gamma y(t\text{-}1)+\mu_2 t+\varepsilon(t).$$

Вторая регрессия содержит постоянный элемент μ_0, а третья, кроме этого, и линейный временной тренд. Во всех трех регрессиях интересующий параметр γ. Нулевая гипотеза H_0: $\gamma=0$ против альтернативы H_1: $\gamma<0$.

Тест Дики-Фуллера (Dickey-Fuller) состоит в следующем. Оцениваются методом наименьших квадратов одно или более из указанных выше уравнений. Получают оценку γ, стандартную ошибку и соответствующее значение t – статистики. Сравнивая значение t-статистики с табличным, определяют, принять или отклонить H_0. Критическое значение t-статистики имеет нестандартное распределение и зависит от формы регрессии и объема выборки [24].

Критические значения не изменятся, если указанные выше модели заменить авторегрессионным процессом произвольного порядка:

$$\Delta y(t)=\gamma y(t\text{-}1)+\sum_{i=2}^{p}\mu_i\Delta y_{t-i+1}+\varepsilon(t),$$

$$\Delta y(t)=\mu_0+\gamma y(t\text{-}1)+\sum_{i=2}^{p}\mu_i\Delta y_{t-i+1}+\varepsilon(t),$$

---

[1] Модели теории временных рядов в финансах и эконометрике//Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 3. Вып. 6. – М.:ТВП, 1996.

$$\Delta y(t)=\mu_0+\gamma y(t\text{-}1)+\mu_2 t+\sum_{i=2}^{p}\mu_i \Delta y_{t-i+1}+\varepsilon(t).$$

Для последних моделей Дики и Фуллер предложили три дополнительные статистики для тестирования обобщенных гипотез о коэффициентах:

ϕ_1: H_0: $\gamma=\mu_0=0$.

ϕ_2: H_0: $\gamma=\mu_0=\mu_2=0$.

ϕ_2: H_0: $\gamma=\mu_2=0$.

Статистики ϕ_i конструируются как F тест: $\phi_i=\dfrac{(RSS_r-RSS_{ur})/g}{RSS_{ur}/(n-k)}$, где RSS_r и RSS_{ur} – квадраты ошибок короткой и длинной регрессий, g – число исключенных переменных, n – число наблюдений, k – число параметров в длинной регрессии.

Большие значения ϕ_i ведут к отклонению нулевой гипотезы. Критические значения статистик вычислены Дики и Фуллером и затабулированы [24].

Литература к разделу 6: [1, 14, 17, 25, 27, 28].

Контрольные вопросы.

1. Какие ряды называются нестационарными?
2. С какой целью строят модели прогнозирования остатков временных рядов?
3. Особенности моделей авторегрессии. Как осуществляется идентификация параметров модели авторегрессии порядка p?
4. Особенности моделей скользящего среднего. Как осуществляется идентификация параметров модели скользящего среднего порядка q?
5. В чем смысл использования моделей авторегрессии-скользящего среднего?
6. Суть подхода Бокса-Дженкинса.
7. Как подобрать порядок модели Бокса-Дженкинса?
8. Как построить прогноз на основе модели Бокса-Дженкинса?
9. Использование свойств стационарных и нестационарных временных рядов для подбора модели ряда.
10. Какие модели называются моделями волатильности?
11. В каких случаях применяются *ARCH* и *GARCH* модели?
12. Суть проблемы единичных корней.
13. Тестирование стационарности временного ряда.
14. Поясните, как вы понимаете термин «условная гетероскедастичность остатков» в моделях *ARCH* и *GARCH*?

Задания для самостоятельной работы.

1. Исходные данные. Индекс объема выпуска промышленной продукции в РФ с 1991 г. по 1995 г. после выделения неслучайной составляющей имеет вид:

Год	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1991	-12,1	-9,0	-0,8	-5,4	-0,9	-2,6	13,7	20,7	16,9	3,9	-3,7	14,9
1992	-9,2	-8,2	-4,6	-3,7	-5,6	-5,7	0,9	-11,0	-3,5	3,3	8,2	18,1
1993	-14,9	-2,1	5,6	6,3	1,9	7,0	3,1	6,6	11,4	11,7	13,6	11,6
1994	-23,9	-17,3	-17,1	-20,3	-16,6	-10,9	-10,4	-6,9	-6,1	-0,9	16,4	3,3
1995	4,4	-17,4	-18,1	-8,4	8,7	3,0	2,8	3,9	13,9	17,9	20,9	10,6

Протестируйте ряд на стационарность.

2. Найдите автокорреляционные функции ряда (задание 1), его первых и вторых разностей.

3. Какие модели для указанного ряда (задание 1) вы можете предложить. Обоснуйте свое мнение.

4. Идентифицируйте несколько подходящих моделей ряда (не более трех) для задачи 1.

5. Выберите наилучшую из моделей в задаче 4. Обоснуйте свой выбор.

6. Исходные данные. В файле sp500 (www.econ.kuleuven.ac.be/gme/) даны ежедневные значения индекса Standard&Poor's 500 начиная с января 1981 г. по апрель 1991 г., вычисленные как изменения прологарифмированного индекса. Всего 2783 наблюдения. Основываясь на этих данных, постройте модель прогнозирования изменения логарифма индекса S&P500.

7. Исходные данные в файле ppp (www.econ.kuleuven.ac.be/gme/) (см. задачу 4 к разделу 4). Какие модели прогнозирования индекса цен вы можете предложить? Рассмотрите также возможные варианты регрессионных моделей.

8. Протестируйте ряды в задаче 5 к разделам 1-3 на стационарность. Какие модели необходимо использовать при прогнозировании значений этих рядов. Проведите идентификацию параметров этих моделей.

9. В файле output (www.stern.nyu.edu/~wgreene/Text/econometric-analysis.htm) имеются данные о денежном агрегате M1, ВВП и дефляторе цен в США поквартально с 1950 г. по 1983 г. Подберите *ARIMA* модель и модель регрессии. Изучите вопрос о включении в модель фактора времени.

10. Протестируйте ряд задачи 9 на наличие единичных корней. Сделайте выводы по результатам тестирования.

11. Для данных задачи 9 изучите возможность применения для прогнозирования инфляции модели *ARCH*. Идентифицируйте модель. Постройте прогноз с использованием *ARCH* модели и моделей задачи 9. Сделайте выводы.

7. Многофакторные модели прогнозирования

7.1. Прогнозирование на основе индикаторов

Разработка и использование аналитических показателей.

Аналитические показатели представляют собой различного рода индексы, сформированные на основе определенной совокупности отдельных индикаторов. *Индикатором* называется статистический показатель, динамика которого имеет устойчивое соответствие с изменением экономической конъюнктуры. Рассмотрим такие аналитические показатели, как сводные и диффузные индексы.

Сводные индексы представляют собой средневзвешенные оценки основных групп экономических индикаторов (опережающих, совпадающих и запаздывающих). При их расчете осуществляется нормирование вариаций принимаемых к рассмотрению экономических индикаторов. В качестве весов используются оценки эффективности экономических индикаторов. Это позволяет получить более адекватные показатели изменений конъюнктуры.

Анализ поведения сводных опережающих индексов показывает, что они, определяя в своих изменениях экономическую конъюнктуру, дают широкую вариацию времени наступления колебаний. В этом заключается одна из трудностей использования индикаторов и индексов в прогнозировании: даже в том случае, когда они верно отражают циклические колебания, очень трудно определить конкретное время наступления последних.

Диффузные индексы отражают степень охвата происходящими процессами различных уровней экономики. Они представляют собой доли компаний, отраслей или регионов, в которых происходит изменение тех или иных показателей. Важным свойством диффузных индексов является их способность в ряде случаев на несколько месяцев опережать изменения соответствующих экономических индикаторов. Эти индексы служат источником дополнительной информации для анализа и прогнозирования экономической конъюнктуры.

Наиболее известны диффузные индексы основных групп экономических индикаторов: опережающих, совпадающих и запаздывающих. При их построении используются разные подходы. Например, вычисляется доля экономических индикаторов, которые увеличиваются в течение данного периода. Обычно значения таких индексов рассчитываются как средневзвешенные всех входящих в них экономических индикаторов. При этом экономические индикаторы, которые увеличились, получают значение 1, не изменились - 0,5, сократились - 0. То есть, если 6 из 12 лидирующих показателей растут, а остальное сокращаются, то соответствующий диффузный индекс составит 50%. Если все экономические индикаторы сокращаются, то значение индекса будет равно 0. Таким образом, если величина индекса варьирует в пределах от 50% до 100%, то следует ожидать роста, если 50% - стабилизации, изменяется от 0 до 50% - сокращения.

Другим методом построения диффузного индекса является вычисление средней продолжительности роста каждого экономического индикатора, входящего в индекс, принимающего значение количества месяцев, в течение которых происходит рост (положительные числа) или сокращение (отрицательные числа) производства. Коэффициент средней продолжительности определяется как средневзвешенная этих величин. Например, если в индекс входят два индикатора, один из которых к текущему периоду на протяжении 4 месяцев увеличивался (он принимает значение +4), а другой сокращался в течение одного месяца (он принимает значение -1), то индекс продолжительности роста составит 1,5.

Следует отметить сложность интерпретации как самих диффузных индексов, так и величин средней продолжительности их роста.

Методы экспоненциального сглаживания с индикаторами динамики.

Нами предложен путь улучшения моделей Брауна, то есть более полного отражения в математической модели экономических взаимосвязей. Он состоит в использовании для прогнозирования индексов группы переменных, предупреждающих об изменении какого-либо прогнозируемого показателя.

Основная идея применения индекса индикаторов для прогнозирования состоит в обеспечении информации о будущем направлении развития и сокращении «лага распознавания» процессов.

Пусть на прогнозируемый показатель могут оказывать влияние какие-либо факторы - индикаторы. Изменение индекса опережающих индикаторов обеспечивает информацию о будущем направлении развития прогнозируемого показателя. Под индексом будем понимать средневзвешенный индекс нескольких индикаторов.

Вес или теснота связи между прогнозируемым показателем и индикатором определяется формально с помощью выборочного коэффициента корреляции. Однако, в экономике нередки случаи, когда коэффициент корреляции показывает наличие линейной связи между показателями, а фактически взаимосвязь отсутствует. Поэтому показатели - факторы должны определяться путем использования экономических закономерностей.

Пусть y_t - прогнозируемый по дискретным моментам времени 1,2,… показатель, $\left\{g_i^{t-\theta_i}\right\}_{i=1}^{f}$ - факторы, влияющие на y_t с временным лагом в θ_i единиц времени, f - количество факторов, J_t^i - значение индекса фактора i в момент времени t, $\bar{y}$ - среднее арифметическое (рассчитывается по ряду: $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t$), K_t - сводный индекс.

Исходные временные ряды сводятся в таблицу исходных данных:

t	1	...	t	...	n
y_t	y_1	...	y_t	...	y_n
g_1^t	$g_1^{1-\theta_1}$	...	$g_1^{t-\theta_1}$	...	$g_1^{n-\theta_1}$
...	...	...	...	...	...
g_i^t	$g_i^{1-\theta_i}$	...	$g_i^{t-\theta_i}$	...	$g_i^{n-\theta_i}$
...	...	...	...	...	...
g_f^t	$g_f^{1-\theta_f}$	...	$g_f^{t-\theta_f}$	...	$g_f^{n-\theta_f}$

Последовательность расчета прогноза показателя y_t с учетом упреждающих факторов включает несколько этапов.

1. Рассчитываются коэффициенты корреляции $\left\{\rho_i\left(y_{t+\theta_i}, g_i^t\right)\right\}_{i=1}^{f}$ по формулам:

$$\rho_i\left(y_{t+\theta_i}, g_i^t\right) = \frac{\sum_{t=1}^{n-\theta_i}\left(g_i^t - \bar{g}_i\right)\left(y_{t+\theta_i} - \bar{y}\right)}{\left[\sum_{t=1}^{n-\theta_i}\left(g_i^t - \bar{g}_i\right)^2 \sum_{t=1}^{n-\theta_i}\left(y_{t+\theta_i} - \bar{y}\right)^2\right]^{1/2}}, \forall i .$$

Проверяется значимость коэффициентов корреляции (для малых выборок) с учетом того, что величина $\frac{\rho_i}{\sqrt{1-\rho_i}}\sqrt{n-2}$ удовлетворяет t - распределению Стьюдента с (n-2) степенями свободы.

2. Рассчитываются индексы упреждающих индикаторов:

$$J_t^i = \begin{cases} \frac{g_i^{t-1}}{g_i^t}, \; t \ge \theta_i + 2; \\ 1, \quad t < \theta_i + 2, \end{cases} \quad i = \overline{1, f},$$

если $\left|J_t^i\right| < 1$, то берется обратная величина J_t^i.

Рассчитывается сводный средневзвешенный индекс:

$$K_t = \begin{cases} 1, \quad t < \theta_m + 2, \\ \prod_{i=1}^{f} J_t^i \left|\rho_i\right|, \; t \ge \theta_m + 2, \end{cases} \quad \theta_m = \min\left\{\theta_i\right\}_{i=1}^{f}.$$

3. Определяется функция динамики весового параметра сглаживания в

методе экспоненциального сглаживания:

$\mu_t = K_t \mu_0$, $\forall t=1, \ldots, n$, μ_0=const – начальное значение весового коэффициента.

4. Рассчитывается экспоненциальный тренд и делается прогноз в соответствии с одной из полиномиальных моделей.

7.2. Принцип баланса переменных

На практике для многих социально-экономических процессов характерно наличие переменных, между которыми наблюдаются балансовые соотношения вида:

$$y_{m,t} + y_{m-1,t} + \ldots + y_{2,t} = y_{1,t}, \tag{23}$$

где $y_{1,t}$, …, $y_{m,t}$ - законы изменения уровней временных рядов в момент времени t.

При построении прогноза нескольких взаимосвязанных переменных ситуация принципиально меняется. Как бы глубоко ни были разработаны прогнозы отдельных изолированных рядов динамики, они не могут гарантировать отсутствие «веера» прогнозов, отличающегося абсурдностью предсказываемых значений изучаемых переменных с точки зрения их внутренней зависимости. Поэтому традиционные методы подбора формы тренда дополняются принципом баланса переменных.

Вывод о приемлемости тех или иных аналитических функций для описания динамики взаимосвязанных показателей определяется степенью соблюдения для прогнозируемых значений переменных балансового соотношения (23). Процесс прогнозирования состоит из двух стадий:

1. Определение возможных функций кандидатов, наиболее точно описывающих изучаемые ряды динамики.

2. Последовательный перебор ограниченного числа главных функций, выделенных на предыдущей стадии.

В качестве оценки каждой комбинации функций выступает степень выполнения соотношения (23) для всех точек периода упреждения. Наилучшая комбинация соответствует минимальному значению критерия баланса переменных:

$$B_j = \frac{\sum\limits_{l_1}^{l_2} (y_{1t} - y_{2t} - \ldots - y_{m,t})^2}{\sum\limits_{l_1}^{l_2} y_{1,t}^2} \to \min, \tag{24}$$

где (l_1-l_2) - период упреждения, B_j - суммарная относительная величина разбаланса прогноза по всем точкам периода упреждения, j=1, 2, ..., θ.

Чем ближе разбаланс прогноза к нулю, тем больше оснований считать именно эту комбинацию функций наилучшим предиктором, и наоборот. Таким образом, может быть построена селективная модель, которая включает в свою базу набор из k функций кандидатов. Вычисления будущих значений ряда осуществляются по каждой из комбинаций моделей, и в качестве прогноза выбирается расчетная величина, полученная по той из комбинаций, для которой заданный критерий (24) минимален. Высокие значения разбаланса (порядка 10^{-3} – 10^{-1}) свидетельствуют об ошибках на первой стадии отбора. Количество комбинаций моделей, предназначенных для перебора, легко вычисляется: k!. Ясно, что перебор всех комбинаций аналитически сделать сложно, поэтому метод баланса предполагает использование ЭВМ для увеличения скорости процесса прогнозирования.

Тестирование показывает, что метод баланса обладает преимуществом по сравнению с традиционным подходом при изучении и прогнозировании взаимосвязанных показателей по коротким периодам предыстории.

7.3. Адаптивная модель множественной регрессии

Для множественной регрессии весьма желательно было бы найти способ корректировки, обновления ее коэффициентов. Это позволит исследовать направление и характер эволюции взаимосвязанных переменных и получать прогнозы по модели, лучше отражающей текущее состояние процесса.

Имеется следующий способ адаптации коэффициентов множественной регрессии [12].

Пусть уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y}_\tau(t) = \omega_{1,t}x_{1,t}+\ldots+\omega_{M,t}x_{M,t},\ \tau \geq 0.$$

При $\tau = 0$ решается задача эволюции коэффициентов связи, при $\tau > 0$ задача прогнозирования решается на τ шагов вперед.

Определим ошибку как:

$$e_{t+\tau} = y_{t+\tau} - \hat{y}_\tau(t),$$

и произведем корректировку коэффициентов $\omega_{i,t}$.

Для адаптации коэффициентов воспользуемся методом наискорейшего спуска, т.е. обновление весов будем осуществлять по правилу:

$$W_н=W_с-k\mathrm{grad}(e_{t+\tau}^2),$$

где $W_с$ – вектор старых коэффициентов, $W_н$ – вектор новых коэффициентов, grad($e_{t+\tau}^2$) – вектор, градиент $e_{t+\tau}^2$. С учетом выражения для $e_{t+\tau}$ получаем $W_н=W_с+2ke_{t+\tau}X_t$.

Для нахождения значения k можно получить формулу: $k = \alpha/(2\Sigma x_{i,t})$, тогда $(e_н)_{t+\tau} = (e_с)_{t+\tau}(1-\alpha)$ и при $0<\alpha<2$ $|(e_н)_{t+\tau}|<|(e_с)_{t+\tau}|$. При этом коэффициент k изменяется во времени.

Следовательно, α определяет реакцию модели на полученную текущую ошибку и корректирует коэффициенты множественной регрессии так, чтобы уменьшить ошибку на $(1-|1-\alpha|)100\%$.

Литература к разделу 7: [3, 11, 15, 24].

Контрольные вопросы.

1. Преимущества и недостатки использования индикаторов для прогнозирования экономических явлений, процессов?

2. Схема метода экспоненциального сглаживания с индикаторами динамики.

3. Для чего используется принцип баланса переменных?

4. Какие виды индикаторов вы знаете?

Задания для самостоятельной работы.

К задачам 1-3 макроэкономические данные по РФ находятся по адресу:

Russian Economic Trends - http://www.hhs.se/site/ret/ret.htm

1. Согласно эмпирическим данным по странам ЕС некоторые переменные систематически опережают в своем изменении ВВП в ходе экономического цикла, в частности – степень использования производственных мощностей, инвестиции и запасы, цены акций, реальные кассовые остатки; тогда как другие – уровень безработицы, инфляции – систематически отстают. Третьи – процентные ставки – совпадают с динамикой ВВП.

Насколько эти факты соответствуют экономике России? Предложите многофакторную модель прогнозирования ВВП. Оцените параметры модели.

2. Предложите многофакторную модель прогнозирования валютного курса (рубль по отношению к \$). Выполните необходимое моделирование. Эмпирические данные подтверждают вашу модель?

3. Предложите модель прогнозирования реального выпуска, используя в качестве индикаторов номинальные темпы роста денежной массы, темпы инфляции, спрос домохозяйств. Проведите идентификацию и интерпретацию модели. Сделайте выводы.

4. Предложите многофакторную модель прогнозирования для исходных данных задачи 7 предыдущего раздела.

5. Для данных задачи 9 предыдущего раздела постройте модель прогнозирования ВВП с учетом принципа баланса переменных. Сделайте необходимые преобразования исходных данных. Оцените качество построенной модели.

8. Экспертные методы прогнозирования

8.1. Метод Дельфи

Одним из наиболее перспективных методов формирования групповой оценки экспертов является метод Дельфи, получивший название от греческого города Дельфи и мудрецов, славившихся в древности предсказаниями будущего. Метод представляет собой ряд последовательно осуществляемых процедур, направленных на формирование группового мнения по проблемам, по которым ощущается недостаток информации.

Для разработки прогноза необходимо сформировать репрезентативную группу экспертов, провести экспертизу (опрос), статистически обработать результаты.

При отборе экспертов учитывается их уровень профессионализма в соответствующей предметной области, опыта, уровень эрудиции и т.п. Компетентность может быть определена способом самооценки эксперта:

$$K = 0{,}5\left(\frac{\sum_{j=1}^{m} v_j}{\sum_{j=1}^{m} v_{j\max}} + \frac{\lambda}{P}\right),$$

где v_j - вес градации, указанной экспертом по j критерию компетентности, $v_{j\max}$ - максимальный вес по j критерию, m – общее количество критериев компетентности в анкете, λ - самооценка эксперта в баллах, P – предел шкалы самооценки в баллах.

Количество экспертов может быть определено, например, исходя из их минимального количества при заданной величине изменения средней оценки ε: $n_{\min} = 0{,}5(3/\varepsilon + 5)$.

Опрос проводится по заранее разработанным анкетам в несколько туров. Целью первого тура является уточнение перечня событий для прогноза в определенной области. После того, как события идентифицированы: одинаковые события объединены, второстепенные исключены, - перечень событий становится основой второй анкеты.

Во втором туре опроса эксперты непосредственно работают над вопросами в анкетах. Их просят также привести соображения, по которым они считают свои оценки правильными, т. е. указать причины выбора. После второго тура опроса производят обработку полученных оценок. При статистической обработке результатов опросов экспертов рассчитываются средние значения, дисперсии и доверительные интервалы, коэффициенты вариации оценок по каждому из направлений. Полученные таким образом показатели принимаются за характеристики распределения оценок. Каждому эксперту сообщаются значения этих характеристик. Экспертов, чьи оценки оказались в крайних квартилях, просят их мотивировать, т. е. обосновать причины расхождения с групповым мнением. Эксперты могут приводить любые аргументы или возражения. Они могут пересмотреть свои мнения и при желании исправить оценки. С полученными обоснованиями знакомят остальных экспертов, не указывая при этом, чьи они. Такая процедура позволяет всем экспертам принять в расчет обстоятельства, которые они могли случайно пропустить или которыми пренебрегли во время первого и второго туров опроса.

Третья анкета состоит из перечня событий, групповой медианы событий и верхнего и нижнего квартилей для каждого события, а также сводных данных (аргументов) о причинах оценок. Участников экспертизы просят рассмотреть аргументы и сформулировать новые оценки событий. Если их новая оценка не попала в интервалы между квартилями, полученными во втором туре опроса, то их просят обосновать свою точку зрения и прокомментировать точку зрения тех, кто придерживается противоположных взглядов.

При необходимости могут быть проведены еще несколько туров опроса. Практика показывает, что мнение экспертов достаточно быстро сходится к единому (согласованному).

Для оценки согласованности мнений экспертов по каждому из оцениваемых событий используется коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12\sum_{j=1}^{m} d_j^2}{n^2\left(m^3 - m\right) - n\sum_{i=1}^{n} T_i},$$

где m – количество оцениваемых экспертами направлений (объектов), n – число экспертов в группе, d_j - отклонение суммы оценок, полученных j-м направлением от среднего значения, $d_j = S_j - \overline{S}$, здесь $S_j = \sum_{i=1}^{n} R_{ij}$, а R_{ij} - мнение i эксперта по j направлению, $T_i = \sum_{t_i} t_i^3 - t_i$, где t_i – количество равных рангов в группе. Коэффициент конкордации принимает значения от 0 до 1. Если W=1, это означает полную согласованность мнений экспертов по каждому из оцениваемых направлений, если W=0 – полную несогласованность. Уровень значимости коэффициента конкордации может быть оценен с помощью критерия χ^2.

Для анализа рассогласования мнений экспертов может быть применен и другой подход[2]. Представим оцененные направления в виде матриц упорядо-

[2] Хубаев Г.Н. Эффективность использования техники. – Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1978, с. 50-51.

чения: $L=\{l_{ij}\}_{i,j=1}^{m}$, элементы которых определяются как

$$l_{ij}=\begin{cases}1, \text{если } i \text{ предпочтительнее } j,\\ -1, \text{если } j \text{ предпочтительнее } i,\\ 0, \text{если } i \text{ и } j \text{ равноценны.}\end{cases}$$

Расстояние Кемени $d=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|l_{ij}^{1}-l_{ij}^{2}\right|$ характеризует степень рассогласования между ранжированиями 1 и 2. В симметричной положительной матрице с нулевыми диагональными элементами $D=\{d_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ будут представлены все расстояния для группы экспертов. Сумма элементов i-й строки матрицы D характеризует степень рассогласования i-го эксперта с остальными. Сравнение сумм элементов матрицы D позволяет оценить сходимость мнений экспертов от тура к туру. Таксонометрический анализ матрицы D позволяет выделить согласованные группы среди экспертов.

8.2. Морфологический анализ

Морфологический анализ – метод прогнозирования, основанный на построении матрицы характеристик объекта прогнозирования и их возможных значений с последующим перебором и оценкой вариантов сочетаний этих значений.

Морфологический подход связан со структурными взаимосвязями между объектами, явлениями и концепциями. Один из его принципиальных аспектов - всеобщность, т. е. использование полной совокупности знаний об объекте; вследствие акцента на полноту знаний необходимым требованием для морфологического анализа является отсутствие какого-либо предвзятого предварительного суждения.

Метод позволяет ответить на вопросы: какие средства необходимы для получения всей информации о данной совокупности явлений; какова последовательность всех явлений, происходящих по определенной причине; как проследить все средства данного класса или все методы данного класса, все решения данной конкретной проблемы.

Метод был разработан швейцарцем Ф.Цвикки и предусматривает разбиение проблемы на части, каждая из которых, являясь в определенной степени независимой от других, подвергается тщательному изучению. Такой подход включает следующие этапы:

1. Точная формулировка проблемы, подлежащей решению.
2. Тщательный анализ всех параметров P_i (i=1,…,n), важных с точки зрения решения данной проблемы.

3. Построение «морфологического ящика», потенциально содержащего все решения. Если предложенная проблема полностью решена, то каждое отделение этого «ящика» будет содержать только одно возможное решение либо вообще не будет его иметь. Появление двух или более решений в одном отделении указывает, что не все параметры были учтены или введены в систему. «Морфологический ящик» строится в виде матрицы, элементы которой содержат k_i свойств соответствующих параметров:

$$[P_1^1, P_1^2, \ldots, P_1^{k_1}]$$
$$[P_2^1, P_{21}^2, \ldots, P_2^{k_2}]$$
$$\ldots$$
$$[P_n^1, P_n^2, \ldots, P_n^{k_n}].$$

Последовательное соединение одного какого-либо параметра первого уровня с одним из параметров последующих уровней представляет собой одно из возможных решений проблемы. Общее количество возможных решений равно произведению числа всех параметров, представленных в «ящике», взятых по строкам. Учитывая, что некоторые из этих решений практически неосуществимы, действительное число решений будет несколько меньше.

4. Изучение всех полученных решений с точки зрения их функциональной ценности. Для этого устанавливается шкала оценок. Это наиболее сложный момент морфологического анализа. Универсальной формулы для определения функциональной ценности различных решений нет.

5. Заключительный этап - выбор наиболее желательных конкретных решений и их реализация.

Таким образом, в результате этого метода создается новая информация об изучаемом объекте и вырабатывается оценка всех возможных альтернатив для каждой составной части проблемы. Цель его - выработка наиболее приемлемого решения на основе рассмотрения каждого возможного варианта решения. Преимущества данного метода в том, что он осуществим при наличии малого количества информации по изучаемой проблеме, причем для оценки решений можно использовать самые общие критерии.

Недостатками метода являются сложность и трудоемкость анализа.

8.3. Прогнозный сценарий

Метод построения прогнозного сценария – аналитический метод прогнозирования, основанный на установлении логической последовательности состояний объекта прогнозирования и прогнозного фона во времени при различных условиях для определения целей развития этого объекта.

Таким образом, написание сценария – это идентификация логической последовательности событий с целью показать, как, исходя из существующей ситуации, может шаг за шагом развертываться будущее состояние объекта. Описание обычно совершается в явно выраженных временных координатах. Основное значение сценария - определение генеральной цели развития объекта прогнозирования, выявление основных факторов фона и формулирование критериев для оценки целей. В сценарии используются заранее подготовленные прогнозы и материалы по развитию объекта прогнозирования.

При разработке сценария, поскольку в ней принимает участие группа специалистов, всегда возникает неопределенность, связанная с субъективностью их суждений. Ценность сценария тем выше, чем меньше степень неопределенности, т. е. чем больше степень согласованности мнений экспертов. Поэтому важным качеством сценария является согласованность.

Сценарий может быть представлен как в текстовой, так и в числовой форме.

Общая схема составления сценария следующая.

1. Описание изучаемой системы в абстрактном пространстве параметров. Идентификация внешней среды.
2. Формирование гипотез о развитии системы. Обобщенные прогнозы путей развития системы и вероятность их реализации.
3. Опасности и благоприятные возможности развития. Выбор наиболее вероятного варианта развития. Определение последствий для планирования в каждом из нескольких возможных вариантов.

8.4. Матричный метод

При прогнозировании развития сложных социально-экономических явлений большое значение имеет проблема определения взаимного влияния отдельных компонент исследуемой системы друг на друга и на цели объекта прогноза. Решение этой задачи может быть достигнуто на основе применения матричного метода. Этот метод позволяет сравнить различные направления прогноза по степени важности для достижения совокупности целей или отдельной цели. Поскольку развитие объекта прогноза обычно зависит от значительного числа взаимосвязанных факторов, то применение матричного метода требует все множество различных факторов разбить на комплексы (группы), в каждый из которых входят относительно однородные факторы. Далее оценивается влияние этих комплексов друг на друга и на достижение конечных целей на основе использования операций с матрицами. Это достигается путем ранжирования факторов и определения их относительных весов внутри комплекса.

Взаимное влияние двух комплексов факторов выражается в виде матрицы влияния $A\,[m, n]$, элементами которой a_{ij} являются оценки (в частности, экспертные оценки), отражающие влияние i-го фактора комплекса факторов M на j-й фактор комплекса N. Если имеются две согласованные матрицы $A\,[m, n]$ и $B\,[n, r]$, то их произведение, представляющее собой матрицу $C\,[m(n), r]$, будет выражать влияние комплекса факторов M на комплекс факторов R посредством комплекса N:

$$C\,[m(n), r] = A\,[m, n]\cdot B\,[n, r].$$

Две матрицы-произведения одинакового размера, одна - $C\,[m(n), r]$ выражающая влияние комплекса факторов M на комплекс факторов R через посредство комплекса N и другая - $D\,[m(f), r]$, выражающая влияние комплекса факторов M на комплекс факторов R через посредство комплекса F, могут быть просуммированы:

$$E\,[m(n+f), r] = C\,[m(n), r] + D\,[m(f), r].$$

Если цели объекта прогноза имеют различные степени относительной важности или первоочередности, то каждая цель может быть охарактеризована некоторыми величинами, которые в совокупности будут представлять вектор целей σ: $\sigma\,[z, 1]$. Если далее определена некоторая матрица $G\,[m(n), r]$, выражающая вклад различных факторов из комплекса M в различные элементы вектора σ, то произведение $G\,[m(n), r]$ на $\sigma\,[z, 1]$ даст матрицу $W\,[m, 1]$, элементы которой выражают важность i-го фактора (из комплекса M) для достижения всего комплекса целей с учетом их важности.

Влияние различных элементов комплекса факторов M на достижение j-й цели из совокупности целей $\sigma\,[z, 1]$ определяется разбиением матрицы на подматрицы размера $m\times 1$ путем вычеркивания всех столбцов матрицы, кроме рассматриваемого.

В общем случае (для всей совокупности целей и для j-й цели) компоненты получаемой матрицы-столбца показывают влияние каждого фактора из рассматриваемого комплекса на достижение j-й цели или всей совокупности целей, и используются для характеристики относительной важности различных факторов данного комплекса:

$$W_i^* = \frac{W_i}{\sum_i W_i}.$$

Если каждый из факторов является некоторым направлением прогнозируемого процесса, определенным образом влияющим на достижение целей объекта прогноза, то очевидно, что полученные таким путем оценки относительной важности направлений показывают, какому из них необходимо выделить большее количество ресурсов или обеспечить другие формы предпочтения. Таким образом, если имеется некоторый объем ресурсов S^*, выделенный на развитие всего комплекса факторов M, то распределение их между отдельными направлениями S_i может производиться пропорционально относительной важности этих направлений:

$$S_i = S^* W_i^* .$$

Матричный метод является нормативным методом прогнозирования, в котором задаются конечные цели, а в процессе прогнозирования определяются пути и средства их достижения. Прогностическая функция матричного метода заключается в оценке влияния различных вариантов происходящих сдвигов на достижение конечных целей объекта прогноза. Прогнозная информация формируется за счет того, что в комплексы факторов входят альтернативные решения тех или иных проблем, в том числе и такие, которые находятся на различных стадиях разработок.

Чтобы минимизировать ошибку прогноза, комплексы факторов должны включать возможно больший спектр альтернативных решений той или иной проблемы.

Последовательность применения матричного метода такова.

1. Идентификация факторов, влияющих на достижение поставленных целей.
2. Выделение однородных комплексов факторов путем группировки этих факторов по характеру их влияния.
3. Формирование матриц влияния комплексов факторов друг на друга и на достижение целей.
4. Определение влияния факторов на достижение комплекса целей путем выполнения операций над матрицами влияний (умножение, сложение, вычитание) в соответствии со схемой направления влияний одних факторов на другие (графом влияний), определение относительных весов факторов и ранжирование их.

Исходной информацией для прогнозирования по матричному методу с использованием экспертных оценок являются:

- перечень целей объекта прогнозирования и коэффициенты их относительной важности;
- перечень факторов, влияющих на достижение целей объекта прогноза, сгруппированных в однородные комплексы;
- коэффициенты (баллы) матриц, определяющих влияние одного комплекса факторов на другой или на достижение целей;

- показатели относительной самооценки компетентности экспертов, принимавших участие в работе по прогнозированию развития объекта;
- данные о группах, участвовавших в работе экспертов, необходимые для определения компетентности экспертов.

Другие экспертные методы: метод прогнозного графа и дерева целей см. в [17].

Литература к разделу 8: [4, 15, 17, 21].

Контрольные вопросы.

1. Суть метода Дельфи. Для каких классов задач прогнозирования он может быть использован?
2. По каким критериям подбираются эксперты?
3. Как оценивается степень согласованности мнений экспертов?
4. Этапы морфологического анализа.
5. Что такое прогнозный сценарий и как его построить?
6. В чем особенности использования матричного метода прогнозирования?
7. Отличия экспертных методов прогнозирования от остальных групп методов.

Задания для самостоятельной работы.

1. После двух туров метода Дельфи получены следующие ранги для факторов:

Тур 1

Эксперт	Компетентность	Факторы							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	7	4	4	5	4	5	2	1	4
2	7	1	2	1	3	2	3	4	4
3	8	1	3	2	4	5	6	8	7
4	7	1	6	2	3	4	5	6	6
5	10	1	4	4	3	2	3	5	5

Тур 2

Эксперт	Компетентность	Факторы							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	7	1	3	3	4	3	6	5	8
2	7	1	3	4	6	2	5	8	7
3	8	1	2	3	4	6	5	8	7
4	7	1	6	3	2	2	7	4	5
5	10	1	4	4	3	2	5	7	6

Проведите статистическую обработку результатов опроса. Какова согласованность мнений экспертов? Необходимо ли проведение еще нескольких туров опроса?

2. Используя морфологический анализ, определите стратегию поведения фирмы по отношению к конкурентам на олигополистическом рынке. Примите во внимание позиции конкурентов, их цели и поведение; вид выпускаемого продукта, его цену, продвижение и сбыт. В чем достоинства и недостатки морфологического метода?

3. Можно ли для решения задачи 2 применить метод прогнозного сценария? Поясните свое мнение.

4. Для условий задачи 1 проведите статистическую обработку результатов с использованием таксонометрического анализа на основе расстояния Кемени.

5. Используя матричный метод, определите стратегию инвестиционной политики фирмы. Примите во внимание позиции конкурентов, их цели и поведение; вид выпускаемого продукта, его цену, продвижение и сбыт, финансовые инструменты. Определите необходимые количественные показатели. В чем достоинства и недостатки матричного метода?

9. Модели кривых роста

Кривые роста, описывающие закономерности развития явлений во времени, получают путем аналитического выравнивания динамических рядов. Выравнивание ряда с помощью тех или иных функций в большинстве случаев оказывается удобным средством описания эмпирических данных, характеризующих развитие во времени исследуемого явления. Это средство удобно и для прогнозирования.

Суть метода кривых роста состоит в аппроксимации значений наблюдаемого показателя некоторой функцией (кривой роста), содержащей неизвестные параметры, которые находятся по имеющемуся ряду значений показателя. Прогноз выполняется путем нахождения значения полученной функции в соответствующей точке.

Процесс выравнивания состоит из двух основных этапов:

- Выбор типа кривой, форма которой соответствует характеру изменения динамического ряда.
- Идентификация численных значений (оценивание) параметров кривой.

Задача выбора типа кривой является основной при выравнивании ряда. При всех прочих равных условиях ошибка в решении этого вопроса оказывается более значимой по своим последствиям, чем ошибка, связанная со статистическим оцениванием параметров.

Для выравнивания динамических рядов наиболее часто применяются следующие функции, большинство из которых может быть сведено к линейным:

1. Многочлены различных порядков. Причем оценивание коэффициентов осуществляется МНК. Часто используется линейная функция: $y_t = a_0 + a_1 t$. Приросты $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = a_1$. То есть линейная функция имеет постоянные приросты.

2. Простая экспонента: $y_t = ae^{bt}$ преобразуется к линейному виду $\eta = \ln a + bt$ введением новой переменной $\eta = \ln y_t$. Для идентификации параметров линеаризованной функции применяется МНК.

3. Степенная функция: $y_t = bt^a$ преобразуется к виду $\ln \eta = \ln b + a \ln t$.

4. Гиперболическая функция:

1-го типа $y_t = a + \dfrac{b}{t}$,

2-го типа $y_t = \dfrac{1}{a + bt}$,

3-го типа $y_t = \dfrac{t}{a + bt}$.

Соответственно возможна замена переменных: $y_t = a + b\xi, \xi = \dfrac{b}{t}$; $\eta = a + bt, \eta = \dfrac{1}{y_t}$; $\eta = a + b\xi, \eta = \dfrac{1}{y_t}, \xi = \dfrac{1}{t}$.

5. Логарифмическая функция: $y_t = a + b \ln t$.

6. S – образная кривая $y_t = e^{a+b/t}$ приводится к виду:

$$\eta = a + b\xi, \eta = \ln y_t, \xi = \frac{1}{t}.$$

7. Обратная логарифмическая функция: $y_t = \dfrac{1}{a + b \ln t}$. Преобразования, приводящие функцию к линейному виду:

$$\eta = a + b\xi, \xi = \ln t, \eta = \frac{1}{y_t}.$$

8. Модифицированная экспонента $y_t = b + ce^{at}$. Функция прироста: $\Delta y_t = ce^{at}(e^a - 1)$. Если для всех t $\Delta y_t > 0$, что соответствует c>0, то логарифмируя последнее равенство, получим:

$$\ln \Delta y_t = \ln[c(e^a - 1)] + at.$$

Так как последняя функция линейная, то для определения ее параметров можно воспользоваться МНК. Если приросты $\Delta y_t < 0$, то перед логарифмированием следует поменять знаки в обеих частях равенства $\Delta y_t = ce^{at}(e^a - 1)$.

Модифицированная экспонента обладает свойством постоянства отношений последовательных приростов:

$$\frac{\Delta y_{t+1}}{\Delta y_t} = \frac{ce^{a(t+1)}(e^a - 1)}{ce^{at}(e^a - 1)} = e^a = const.$$

9. Для функции $y_t = b + ca^t$ линеаризующее преобразование суть:
$\ln \Delta y_t = \ln[c(a-1)] + t \ln a$.

10.Функция вида $y_t = \dfrac{k}{1 + de^{at}}$ приводится к модифицированной экспоненте в результате введения новой переменной $\eta = 1/y_t$.

11. Логистическая кривая (кривая Перла-Рида): $y_t = \dfrac{1}{k + ab^t}$ преобразуется к виду функции 9, путем введения новой переменной $\eta = 1/y_t$.

12.Кривая Гомпертца: $y_t = ba^{ct}$ преобразуется к виду функции 9, путем замены переменной $\eta = \ln y_t$.

Выбор кривой осуществляется либо визуально, либо с использованием метода последовательных разностей и т.п. При идентификации параметров МНК можно подобрать форму кривой по максимальному значению коэффициента детерминации или минимальному значению среднеквадратической ошибки и т.п.

Литература к разделу 9: [8, 19, 24].

Контрольные вопросы.

1. Суть метода кривых роста.
2. Виды кривых роста и способы подбора кривой.
3. Какие вы знаете методы оценки адекватности и точности прогноза? Когда используется каждый из этих методов?
4. В чем недостатки метода кривых роста?

Задания для самостоятельной работы.

1. Используйте метод кривых роста для прогнозирования на 3 шага вперед:

а) индекса потребительских цен;

б) выпуска промышленной продукции в текущих ценах;

в) валютного курса (рубль к $);

г) расходов федерального правительства на образование;

д) величины номинальных среднемесячных доходов.

Исходные данные. Макроэкономические данные по РФ:

Russian Economic Trends - http://www.hhs.se/site/ret/ret.htm

Подберите оптимальную аппроксимирующую функцию. Используйте для оценки качества аппроксимации различные показатели качества.

2. Улучшится ли качество прогноза в задаче 1 при использовании многофакторных или регрессионных моделей прогнозирования? Проанализируйте и подтвердите выводы эмпирическими результатами.

3. Выполните анализ полученных в задаче 1 результатов.

Какие функции использовались для аппроксимации? Почему?

Каково качество прогноза, полученного по построенным моделям?

В чем достоинства и недостатки метода кривых роста?

4. В файле Yields (www.stern.nyu.edu/~wgreene/Text/econometric-analysis.htm) даны доходы по облигации. Подберите модель роста для указанного ряда. Рассчитайте параметры модели. Постройте автокорреляционную функцию ряда до 15 порядка включительно. Сделайте выводы. Возможно ли применение модели авторегрессии? Каков порядок авторегрессии? Авторегрессионная модель лучше кривой роста? Почему?

5. Для кривой Гомпертца $y_t = a_o a_1^{a_2^t}$ подберите линеаризующее преобразование. Найдите соответствующую функцию прироста.

10. Оценка адекватности и точности прогнозов

Для сравнения различных альтернативных прогнозов необходим критерий оценки качества прогноза. Используются следующие критерии:

1. Коэффициент несовпадения ретроспективного предсказания P_i с наблюдавшимися значениями A_i, предложенный Тейлом:

$$L = \frac{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(P_i - A_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P_i^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A_i^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Коэффициент легко вычисляется, и его значения принадлежат отрезку [0, 1], причем на концах отрезка он имеет следующую содержательную интерпретацию: при L=0 – отличное качество прогноза; при L=1 – плохое качество прогноза. Может применяться как в случае статистического, так и в случае качественного прогнозирования.

2. Стандартное отклонение. Пусть $e_t = y_t - \hat{y}_t$ - ошибка прогноза, при-

чем $y_t \neq 0$, $\hat{y}_t$ - прогноз. Определим среднее абсолютное отклонение ошибки – MAD_t сгладив экспоненциально ошибки e_t:

$$MAD_t = \alpha|e_t| + (1-\alpha)MAD_{t-1}. \tag{25}$$

Очевидно, что MAD_t неотрицательно. Оказывается, что для довольно большого класса распределений значение стандартного отклонения несколько больше значения среднего абсолютного отклонения и пропорционально ему. Константа пропорциональности для различных распределений колеблется между 1,2 и 1,3 (для нормального распределения - $\sqrt{\pi/2}$). То есть:

$$\sigma_t \approx 1{,}25 MAD_t. \tag{26}$$

Имеем следующую процедуру оценки качества прогноза:

- Вычислим ошибку прогноза e_t.
- Вычислим значение MAD_t по формуле (25). Для прогноза экономических показателей удовлетворительной является MAD_0=0,1S_0, где S_0 - начальное значение экспоненциальной средней ряда.
- Вычислим стандартное отклонение по формуле (26).
- При относительно малом горизонте прогнозирования с достаточной степенью уверенности можно утверждать, что будущее значение прогнозируемого показателя попадет в интервал $\pm\sigma$ от прогнозируемого значения.

3. Среднеабсолютная процентная ошибка (Mean Absolute Percentage Error):

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1}\frac{|e_t|}{y_t}\cdot 100\% .$$

Показатель *MAPE*, как правило, используется для сравнения точности прогнозов разнородных объектов прогнозирования, поскольку он характеризует относительную точность прогноза.

Для прогнозов высокой точности *MAPE*<10%, хорошей - 10%<*MAPE*<20%, удовлетворительной - 20%<*MAPE*<50%, неудовлетворительной - *MAPE*>50%.

Целесообразно пропускать значения ряда, для которых $y_t = 0$.

4. Средняя процентная ошибка (Mean Percentage Error) и средняя ошибка (Mean Error). *MPE* характеризует относительную степень смещенности прогноза. При условии, что потери при прогнозировании, связанные с завышением фактического будущего значения, уравновешиваются занижением, идеальный прогноз должен быть несмещенным, и обе меры должны стремиться к нулю. Средняя процентная ошибка не определена при нулевых данных и не должна превышать 5%:

$$MPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1}\frac{e_t}{y_t}100\%.$$

Абсолютное смещение характеризует средняя ошибка:

$$MPE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1}e_t.$$

5. Средний квадрат ошибки (Mean Square Error) и сумма квадратов (Sum Square Error).

Соответственно:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-1}e_t^2 \text{ и } SSE = \sum_{t=1}^{n-1}e_t^2.$$

Чаще всего *MSE* и *SSE* используются при выборе оптимального метода прогнозирования. В большинстве пакетов программ по прогнозированию именно эти два показателя принимаются в качестве критериев при оптимальном выборе параметров моделей.

Литература к разделу 10: [3, 13, 17, 19, 20, 24, 28].

Контрольные вопросы.

1. Достоинства и недостатки методов оценки качества прогноза.
2. Схема расчета стандартного отклонения прогноза.
3. Какие показатели качества модели и прогноза рассчитываются в статистических пакетах прикладных программ?

Библиография

1. **Айвазян С.А., Мхитарян В.С.** Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
2. **Андерсон Т.** Статистический анализ временных рядов. - М.: Мир, 1976. – 755 с.
3. **Арженовский С.В.** Эконометрические методы. Курс лекций. – Новочеркасск: НГТУ, 1998. – 86 с.
4. **Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г.** Математико-статистические методы экспертных оценок. – М.: Статистика, 1980. – 263 с.
5. **Бокс Дж., Дженкинс Г.** Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974, вып. 1, 2. – 406 с.
6. **Кейн Э.** Экономическая статистика и эконометрия. - М.: Статистика, 1977. – 255 с.
7. **Кендалл М.** Временные ряды. - М.: Финансы и статистика, 1981. – 736 с.
8. **Кильдишев Г.С., Френкель А.А.** Анализ временных рядов и прогнозиро-

вание. - М.: Статистика, 1973. – 452 с.

9. **Князевский В.С., Житников И.В.** Анализ временных рядов и прогнозирование: Учеб. пособие. – Ростов-на-Дону: РГЭА, 1998. – 161 с.

10. **Князевский В.С., Молчанов И.Н.** Статистические расчеты на компьютере с использованием ППП Microstat. - Ростов-на-Дону: РГЭА, 1996. - 86 с.

11. **Ковалева Л.Н.** Многофакторное прогнозирование на основе рядов динамики. – М.: Статистика, 1980. – 48 с.

12. **Лукашин Ю.П.** Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. - М.: Статистика, 1979. – 254 с.

13. **Льюис К.Д**. Методы прогнозирования экономических показателей. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 130 с.

14. **Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.** Эконометрика. Начальный курс. – М.: Дело, 2000. – 400 с.

15. **Мотышина М.С.** Методы социально-экономического прогнозирования. Учебное пособие. – С.-Пб.: Изд-во СПбУЭФ, 1994. – 84 с.

16. **Пуарье Д.** Эконометрия структурных изменений (с применением сплайн-функций). – М.: Финансы и статистика, 1981. – 183 с.

17. Рабочая книга по прогнозированию. – М.: Мысль, 1982. – 430 с.

18. **Скучалина Л. Н., Крутова Т.А**. Организация и ведение базы данных временных рядов. Система показателей, методы определения, оценки прогнозирования информационных процессов. ГКС РФ. - М., 1995. – 48 с.

19. Статистическое моделирование и прогнозирование. Учебное пособие. (Под ред. А. Г. Гранберга). - М.: Финансы и статистика, 1990. – 383 с.

20. **Тейл Г.** Экономические прогнозы и принятие решений. – М.: Прогресс, 1971. – 510 с.

21. **Терехов Л.Л.** Социально-экономическое прогнозирование. Учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГПУ, 1995. – 68 с.

22. **Френкель А.А.** Прогнозирование производительности труда: методы и модели. - М.: Экономика, 1989. – 389 с.

23. **Хаджиев В., Молчанов И.Н.** Статистическое программное обеспечение: тенденции и особенности развития //Вопросы статистики, 2001. - № 1. – С.44-47

24. **Четыркин Е.Н.** Статистические методы прогнозирования. - М.: Статистика, 1977. – 200 с.

25. **Cochrane, J.** *Time Series for Macroeconomics and Finance,* Unpublished Lecture Notes, University of Chicago, Graduate School of Business, 1997. – 124 p.

26. **Dinardo, J., Johnston, Jack, Johnston, John** *Econometric Methods*, 4th Edition, McGraw-Hill, 1997. – 531 p.

27. **Greene, W.H.** *Econometric analysis,* Prentice Hall, 4th Edition, 2000. – 1004 p.

28. **Hamilton, J.D.** *Time-Series Analysis,* Princeton University Press, 1994. – 820 p.

29. **Verbeek, M.** *A Guide to Modern Econometrics*, Wiley, 2000. – 400 p.

Ресурсы Интернет

www.ssrn.com
www.iza.org
www.cepr.org
www.wdi.bus.umich.edu
www.stata.com
www.eviews.com
www.cerge.cuni.cz
www.som.hw.ac.uk/cert
www.hhs.se/site
www.cemi.ru
www.nber.org
www.econ.kuleuven.ac.be/gme/
www.stern.nyu.edu/~wgreene/Text/econometricanalysis.htm
www.hhs.se/site/ret/ret.htm
www.hhs.se/site/ret/exceldb/default.htm
lily.src.uchicago.edu/jheckman.html
gsbwww.uchicago.edu/fac/john.cochrane/research/Papers/timeser1.pdf
www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html
castle.uvic.ca/econ/depts

Содержание

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Учебное пособие

Арженовский Сергей Валентинович
Молчанов Игорь Николаевич

Ответственная за выпуск
Начальник РИО РГЭУ В.Е. Смейле
Редактирование, корректура и
оригинал-макет авторов

Лицензия ЛР N 020276 от 18.02.97
Государственного Комитета Российской Федерации по печати

Изд. № 71/5315	Подписано к печати	05.03.2001.	
Бумага офсетная.	Печать офсетная.	Формат 60•84/16	
Объем 5,0 уч.-изд.л.	Тираж 100 экз.	Заказ № 22	«С» 71

344007, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 69, РГЭУ «РИНХ», Издательство

Отпечатано в копировально-множительном центре.
Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 79. ПБОЮЛ Зайчиков О.Б.